



# MAPLE 10

## Exercices

Jean Brillet

Observatoire de Bordeaux

*[www.obs.u-bordeaux1.fr](http://www.obs.u-bordeaux1.fr)*



Laboratoire d'Astrophysique de Bordeaux



# Table des matières

<b>1</b>		<b>9</b>
1.1	Liste . . . . .	9
1.2	Primitive . . . . .	9
1.3	Système linéaire . . . . .	9
1.4	Limite . . . . .	9
1.5	Intégrale . . . . .	9
1.6	Série . . . . .	10
1.7	Série entière . . . . .	10
1.8	Transformation de Laplace . . . . .	10
1.9	Fonction de Heaviside et transformation de Fourier . . . . .	10
1.10	Equation ordinaire . . . . .	10
<b>2</b>		<b>11</b>
2.1	Fonction $\Gamma$ . . . . .	11
2.2	. . . . .	11
2.3	. . . . .	11
2.4	. . . . .	11
2.5	Constante d'Euler-Mascheroni . . . . .	11
2.6	. . . . .	11
2.7	. . . . .	12
2.8	. . . . .	12
2.9	. . . . .	12
2.10	. . . . .	12
2.11	. . . . .	12
2.12	. . . . .	12
<b>3</b>		<b>13</b>
3.1	Angle entre deux vecteurs . . . . .	13
3.2	Diagonalisation des matrices . . . . .	13
3.3	Diagonalisation numérique d'une matrice . . . . .	13
3.4	Valeurs propres . . . . .	14
3.5	PGCD de deux polynômes . . . . .	14
3.6	Polynôme, racines et tracé graphique . . . . .	14
3.7	Tracé dans le plan complexe . . . . .	14
3.8	Polynômes de Wilkinson . . . . .	15

3.9	Une somme suspecte . . . . .	15
3.10	Equation différentielle : solution exacte . . . . .	15
3.11	Equation différentielle : solution numérique . . . . .	16
3.12	Transformation de Mellin . . . . .	16
<b>4</b>		<b>17</b>
4.1	Nombres de Mersenne . . . . .	17
4.2	Eclatement d'une liste . . . . .	17
4.3	Tri pair-impair . . . . .	17
4.4	Factorisation d'un polynôme . . . . .	17
4.5	Rodriguez et Hermite . . . . .	18
4.6	Structures des expressions de Maple . . . . .	18
4.7	Constante de Smarandache . . . . .	18
4.8	Equation différentielle . . . . .	18
4.9	Dérivation d'une intégrale . . . . .	18
4.10	Laplacien et fonction harmonique . . . . .	19
4.11	Equation différentielle . . . . .	19
<b>5</b>		<b>21</b>
5.1	Polynômes minimal et caractéristique . . . . .	21
5.2	Endomorphisme idempotent . . . . .	21
5.3	Théorème d'Hamilton-Cayley . . . . .	21
5.4	Diagonalisation et forme de Jordan . . . . .	22
5.5	Exponentielle d'une matrice. Décomposition de Dunford . . . . .	22
5.6	Générateurs et algèbre de Lie . . . . .	22
5.7	Intégration d'une fraction rationnelle . . . . .	23
5.8	Aire et périmètre d'une ellipse . . . . .	23
5.9	Fonction génératrice des polynômes de Legendre . . . . .	23
5.10	Polynômes de Tchebycheff . . . . .	24
5.11	Simplification et relation de simplification . . . . .	24
5.12	People quizz . . . . .	24
<b>6</b>		<b>25</b>
6.1	Matrices et polynômes de Tchebycheff . . . . .	25
6.2	La spirale de Cornu . . . . .	25
6.3	Equation différentielle et portrait de phase . . . . .	26
6.4	Le groupe de Lorentz . . . . .	26
6.5	Intégration par la méthode des résidus . . . . .	27
6.6	La formule de Râmânujan . . . . .	27
6.7	Des chaînettes et des chèvres... . . . .	27
6.8	Tracés des résultats d'une procédure . . . . .	28
6.9	Lissages (ajustements) . . . . .	28
6.10	Vanille, Fraise, Chocolat ? . . . . .	28

<b>7</b>		<b>29</b>
7.1	Reste intégral d'un développement en série . . . . .	29
7.2	Reconstruction d'une fonction par sa série de Fourier . . . . .	29
7.3	Transformation de Fourier et apodisation . . . . .	30
7.4	La conjecture de Syracuse . . . . .	31
7.5	Tangentes à la représentation graphique d'une fonction . . . . .	31
7.6	Courbe dans le plan complexe . . . . .	32
7.7	Localisation des racines d'un polynôme . . . . .	32
7.8	Inverse d'une matrice modifiée . . . . .	33
7.9	Théorème d'Hadamard-Gerschgorin . . . . .	34
7.10	Système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants et exponentielle d'une matrice . . . . .	34
7.11	Perspective . . . . .	35
<b>8</b>		<b>39</b>
8.1	Ajustement d'une ellipse . . . . .	39
8.2	Système d'équations non linéaires . . . . .	39
8.3	Distribution des nombres premiers . . . . .	39
8.4	Carré magique . . . . .	40
8.5	Singularité mobile d'une équation différentielle . . . . .	41
8.6	Diffraction à l'infini par une fente rectangulaire . . . . .	41
	8.6.1 Amplitude de l'onde diffractée . . . . .	42
	8.6.2 Calcul de l'intensité diffractée . . . . .	43
	8.6.3 Représentation graphique de l'intensité diffractée . . . . .	43
	8.6.4 Maxima de l'intensité diffractée . . . . .	43
8.7	La grille de Vigénère . . . . .	43
8.8	Rayonnement du corps noir . . . . .	45
8.9	L'étrange statistique de Newcomb-Benford . . . . .	46
<b>9</b>		<b>49</b>
9.1	Points de Lagrange d'un système gravitationnel . . . . .	49
	9.1.1 Energie potentielle totale . . . . .	49
	9.1.2 Représentation graphique de l'énergie potentielle . . . . .	50
	9.1.3 Recherche des points de Lagrange . . . . .	50
	9.1.4 Représentation graphique des points de Lagrange . . . . .	50
	9.1.5 Recherche de la solution manquante . . . . .	51
	9.1.6 Les points de Lagrange $L_4$ et $L_5$ . . . . .	51
	9.1.7 Application au système Soleil-Terre . . . . .	51
9.2	Transition vers le chaos par cascades de bifurcations . . . . .	51
	9.2.1 Etude d'un cas stable pour $k = 2.8$ . . . . .	51
	9.2.2 Bistabilité pour $k = 3.3$ . . . . .	52
	9.2.3 Etude de la première et deuxième bifurcation . . . . .	53
	9.2.4 Transition vers le chaos . . . . .	53

<b>10</b>		<b>55</b>
10.1	L'ion moléculaire hydrogénoïde . . . . .	55
10.1.1	Calculs en coordonnées cartésiennes . . . . .	56
10.1.2	Calculs en coordonnées elliptiques . . . . .	56
10.1.3	Calcul du Jacobien . . . . .	56
10.1.4	Calcul de la matrice de recouvrement . . . . .	57
10.1.5	Calcul de la matrice du hamiltonien électronique . . . . .	57
10.1.6	Calcul des énergies propres du système . . . . .	57
10.1.7	Visualisation des orbitales . . . . .	57
10.2	Source d'ondes sonores en mouvement . . . . .	58
10.2.1	Effet Doppler . . . . .	58
10.2.2	Onde de choc : bang supersonique . . . . .	59
10.3	Oscillations de Rabi . . . . .	60
10.3.1	Formulation du problème . . . . .	61
10.3.2	Résolution du système d'équations différentielles . . . . .	61
10.3.3	Applications numériques . . . . .	62

# Avertissements

Les problèmes de ce document ont été classés dans un ordre (très subjectif et très approximatif) de difficultés croissantes. Notez que la difficulté n'est pas nécessairement proportionnelle à la longueur des énoncés. Les plus complexes sont construits pour permettre une approche progressive et, autant que possible, pédagogique.

La division en chapitres n'est faite que pour faciliter l'insertion de nouveaux problèmes et la numérotation des pages de correction sur le Web.



# Chapitre 1

## 1.1 Liste

Poser  $n = 10$ . Former une liste de  $n$  termes  $a_i = i^2$  pour  $i \in [1, n]$ . Calculer le plus simplement possible la moyenne  $\mu$  des éléments de cette liste ainsi que l'écart type

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i - \mu)^2}$$

## 1.2 Primitive

Calculer la primitive (avec terme constant nul) de  $\frac{\sin(3x)}{\sin x}$

## 1.3 Système linéaire

1. Résoudre le système linéaire  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  avec

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. Donner les valeurs décimales de  $\mathbf{x}$  avec 3 chiffres significatifs.

## 1.4 Limite

Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x^2 + 1} - x^2$

## 1.5 Intégrale

Calculer pour  $q > 0$  l'intégrale  $\int_0^{\infty} \frac{e^{-qx}}{\sqrt{x}} dx$

## 1.6 Série

On considère la série d'Euler  $S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$ . Calculer si possible  $S$  puis

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k$$

## 1.7 Série entière

Montrer que  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}$  représente le développement en série entière d'une fonction mathématique connue.

## 1.8 Transformation de Laplace

Construire une fonction  $L$ , transformée de Laplace de  $\frac{\sin(3t)}{t}$ .

## 1.9 Fonction de Heaviside et transformation de Fourier

1. Construire la fonction  $f$  telle que  $f(x) = \cos x$  dans l'intervalle  $[-\pi/2, +\pi/2]$  et  $f(x) = 0$  ailleurs.
2. Tracer la représentation graphique de cette fonction pour des abscisses  $\in [-\pi, +\pi]$ .
3. Transformer l'expression  $f(x)$  en une expression utilisant la fonction de Heaviside.
4. Calculer la fonction  $h$ , transformée de Fourier de cette expression.
5. Tracer la représentation graphique de  $h(x)$  pour  $x \in [-3\pi, +3\pi]$ .
6. Calculer l'ordonnée de la courbe pour  $x = 1$ .

## 1.10 Equation ordinaire

1. Résoudre exactement l'équation  $\cos(2x) = \sin x$  dans l'intervalle  $[-\pi, +\pi]$  puis donner une approximation décimale de la (ou des) solution(s) avec vingt chiffres significatifs.
2. Déterminer dans l'intervalle  $[0, +\pi]$  les solutions (exactes ou numériques) de  $\cos x^2 = \sin x$ .

# Chapitre 2

## 2.1 Fonction $\Gamma$

1. Trouver avec Maple la définition intégrale de la fonction  $\Gamma$  (écrire `GAMMA`).
2. Calculer  $\Gamma(x+1)$  en fonction de  $\Gamma(x)$
3. Calculer  $\Gamma(1)$ ,  $\Gamma(2)$ ,  $\Gamma(3)$  et  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$
4. Tracer la représentation graphique de  $\Gamma(x)$  pour  $x \in [0.1, 4]$ .

## 2.2

Calculer la suite de nombres  $\Gamma(i+1) - i!$  pour  $i$  entier de 0 à 10.

## 2.3

1. Calculer pour  $n \in \mathbb{Z}$  l'expression  $\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right)$
2. Tracer la représentation graphique de  $\Gamma(x)$  pour  $x \in [-5, 4]$ .

## 2.4

Calculer l'abscisse de l'unique minimum de  $\Gamma(x)$  pour  $x > 0$ .

## 2.5 Constante d'Euler-Mascheroni

Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n) \right]$

## 2.6

On appelle  $\gamma$  la constante d'Euler-Mascheroni (souvent dite simplement constante d'Euler). Elle est connue de Maple (écrire `gamma`). Calculer pour  $z > 0$  l'expression

$$z e^{\gamma z} \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{z}{n} \right) e^{-\frac{z}{n}}$$

**2.7**

Calculer  $\int_0^{\infty} e^{-q} \left[ \frac{1}{1-e^{-q}} - \frac{1}{q} \right] dq$

**2.8**

Calculer  $-\int_0^{\infty} e^{-x} \ln(x) dx$

**2.9**

Calculer  $-\left. \frac{\frac{d\Gamma(z)}{dz}}{\Gamma(z)} \right|_{z=1}$

**2.10**

Calculer le développement asymptotique à l'ordre 1 de  $\Gamma\left(\frac{1}{x}\right)$

**2.11**

1. Construire la fonction  $f : s \mapsto -\sin\left(\frac{\pi}{2}s\right) \Gamma(-s)$ .
2. Tracer la représentation graphique de cette fonction pour  $s \in [+1, +3]$  en limitant les ordonnées à l'intervalle  $[-5, +1]$ .
3. Calculer l'ordonnée de la courbe pour  $s = 2$ .
4. Calculer le développement en série de  $f$  autour de  $s = 2$  et en se limitant à l'ordre 4.

**2.12**

Calculer numériquement les solutions réelles de l'équation  $\Gamma(x) = \sin x$  pour  $x > 0$ .

# Chapitre 3

## 3.1 Angle entre deux vecteurs

Soient deux vecteurs d'un espace euclidien orthonormé

$$u = [1, -2, -1]^T \quad v = [-3, -2, -1]^T$$

1. Calculer l'angle entre ces deux vecteurs avec une fonction de **LinearAlgebra**.
2. Calculer cet angle en utilisant la notion de produit scalaire.

## 3.2 Diagonalisation des matrices

Soit la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier (avec Maple!) que cette matrice est carrée, symétrique et lire ses dimensions.
2. Calculer seulement les valeurs propres et diagonaliser directement la matrice en justifiant la démarche et sans considérer la symétrie.
3. Calculer les valeurs propres et vecteurs propres. Diagonaliser la matrice à l'aide des vecteurs propres et sans considérer la symétrie.
4. Diagonaliser la matrice avec les vecteurs propres, mais en considérant la symétrie.

## 3.3 Diagonalisation numérique d'une matrice

Soit la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Diagonaliser cette matrice et trouver la matrice de passage à l'aide d'un calcul numérique.

2. On considère la matrice symétrique

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exprimer cette matrice à partir de la précédente. Diagonaliser cette matrice et trouver la matrice de passage à l'aide d'un calcul numérique et en tenant compte de sa symétrie.

### 3.4 Valeurs propres

On considère la matrice dépendant d'un paramètre  $t$  :  $\begin{pmatrix} 2t & 1 \\ 2 & -t \end{pmatrix}$

1. Déterminer les deux valeurs possibles de  $t$  pour lesquelles cette matrice possède une valeur propre double.
2. Déterminer ces valeurs propres.

### 3.5 PGCD de deux polynômes

On considère les deux polynômes suivants

$$P(x, y) = x^4 + 5x^2 - 2x^3y - 6xy + 6 + y^2x^2 + 3y^2$$

$$Q(x, y) = -x^2y^2 - x + xy^3 + y - i\sqrt{2}xy^2 - i\sqrt{2}$$

Déterminer le PGCD de ces deux polynômes.

### 3.6 Polynôme, racines et tracé graphique

Soit le polynôme  $p(x) = x^5 - 5x^4 + 15x^3 - 25x^2 + 24x - 10$

1. Tracer la représentation graphique de  $p(x)$  pour  $x \in [0, 2]$ .
2. Assigner à une liste les 5 racines exactes de  $p$ .
3. Mettre  $p$  sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré.

### 3.7 Tracé dans le plan complexe

Soient les nombres complexes  $1 + 2i$ ,  $1$ ,  $1 + i$ ,  $1 - 2i$ ,  $1 - i$ .

1. Former la liste  $L$  de ces nombres complexes.
2. Tracer la représentation graphique de ces nombres dans le plan complexe orthonormé sous forme de petits cercles rouges.

### 3.8 Polynômes de Wilkinson

On appelle polynôme de Wilkinson de degré  $n$ , le polynôme unitaire qui a pour racines tous les entiers  $1, 2, \dots, n$ .

$$W_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - i)$$

1. Construire une fonction qui ait pour arguments un entier positif  $n$  et le nom de la variable et pour image un polynôme  $W_n$  complètement développé et ordonné par degrés décroissants.
2. Exprimer  $W_{20}(x)$  et chercher la liste des racines en résolvant l'équation  $W_{20}(x) = 0$ .
3. On appelle  $\widetilde{W}_{20}(x)$  l'expression de  $W_{20}(x)$ , mais avec des coefficients exprimés en virgule flottante (point décimal et puissances de 10) et avec le nombre de chiffres significatifs standard (`Digits:=10;`). Résoudre  $\widetilde{W}_{20}(x) = 0$  et donner la liste des racines. Tracer ces racines sur une représentation graphique.
4. Calculer (sans les compter "à la main") le nombre minimal  $d$  de chiffres significatifs qu'il est nécessaire d'introduire avec `Digits:=d;` pour ne pas perturber par une perte de précision les coefficients de  $W_{20}(x)$ . Exprimer le nouveau  $\widetilde{W}_{20}(x)$  avec `Digits:=d;` et résoudre  $\widetilde{W}_{20}(x) = 0$ .
5. Construire, toujours avec  $d$  chiffres significatifs, le polynôme "perturbé"  $\widetilde{W}_{20}(x) + x^{15}$ . Calculer l'erreur relative introduite par cette modification sur le coefficient de  $x^{15}$  de  $\widetilde{W}_{20}(x)$ . Résoudre encore  $\widetilde{W}_{20}(x) + x^{15} = 0$  et tracer les racines sur une représentation graphique.

### 3.9 Une somme suspecte

On considère la liste  $L$  formée par  $\pi$  suivi de  $2 \times 10^5$  fois  $\exp(-\pi^2)/\pi$

$$L = \left[ \pi, \underbrace{\frac{e^{-\pi^2}}{\pi}, \frac{e^{-\pi^2}}{\pi}, \dots, \frac{e^{-\pi^2}}{\pi}}_{2 \times 10^5 \text{ fois}} \right]$$

1. Limiter l'arithmétique des calculs à 5 chiffres significatifs en posant `Digits:=5;`
2. Calculer la liste  $L$  sous forme de nombres exprimés avec `evalf` en virgule flottante. **Terminer la commande par " : " pour éviter l'affichage !**
3. La liste contient donc  $N = 2 \times 10^5 + 1$  termes. A l'aide d'une boucle `for ... do...end do:` (et uniquement à l'aide d'une boucle) calculer la somme  $L[1] + L[2] + \dots + L[N]$ .
4. Egalement à l'aide d'une boucle (et uniquement à l'aide d'une boucle) calculer la somme  $L[N] + L[N-1] + \dots + L[1]$ . Expliquer avec précision pourquoi les résultats sont différents.

### 3.10 Equation différentielle : solution exacte

1. Résoudre exactement l'équation différentielle  $y'(x) = \frac{y(x)}{x + y(x)}$  avec la condition initiale  $y(1) = 1$ .

2. Tracer pour  $x \in [-1/2, 1]$  les représentations graphiques de  $y(x)$  et de la tangente à la courbe en  $x = 0$ . Imposer un axe des ordonnées allant de 0 à  $3/2$ .
3. La solution présente une singularité qui se manifeste par une tangente verticale pour une certaine abscisse  $x_0$ . On remarquera également que pour les valeurs des abscisses inférieures à  $x_0$  la fonction n'est pas définie dans  $\mathbb{R}$ . Déterminer la valeur de  $x_0$  et en tracer la tangente avec la solution.

### 3.11 Equation différentielle : solution numérique

L'équation différentielle  $y''(x) = y^2(x) + x$  est réputée pour ne pas avoir de solution exprimable en termes de fonctions transcendantes connues (sin, exp, Bessel etc.).

1. Vérifier que Maple ne trouve pas de solution exacte.
2. Donner une représentation graphique de la solution pour  $x \in [-8, 3]$  et les conditions initiales  $\{y'(0) = 0, y(0) = 0\}$ .

### 3.12 Transformation de Mellin

1. Calculer la transformée de Mellin de  $\cos x$ .
2. On appelle *convolution multiplicative* l'opération

$$(f \otimes g)(x) = \int_0^\infty f\left(\frac{x}{y}\right) \frac{g(y)}{y} dy$$

Calculer la transformée de Mellin de cette convolution.

# Chapitre 4

## 4.1 Nombres de Mersenne

1. Construire la liste  $L$  des nombres entiers de la forme  $2^i - 1$  pour  $i \in [1, 20]$ .
2. On appelle *nombres de Mersenne* les nombres premiers de la forme  $2^i - 1$ . Construire à partir de la liste  $L$  une liste  $LM_1$  des nombres de Mersenne contenus dans la liste  $L$ .
3. Construire cette même liste, que l'on appellera  $LM_2$ , à l'aide d'une fonction de MAPLE que l'on cherchera dans l'aide en ligne (on utilisera la valeur du nombre d'éléments contenus dans  $LM_1$ ).
4. Vérifier par une instruction simple que l'on a bien construit deux listes identiques (on veut la réponse *true*).

## 4.2 Eclatement d'une liste

1. Construire une fonction  $F$  qui transforme une liste de listes en une liste simple.

$$F : [[x_1, x_2, \dots, x_n], [x_{n+1}, \dots, x_{n+m}], \dots, [\dots]] \mapsto [x_1, x_2, \dots, x_{n+m}, \dots]$$

2. Appliquer cette fonction à la liste  $[[a, b, c], [x, y], [1, 2, 3, 4]]$ .

## 4.3 Tri pair-impair

1. On considère une liste faite de nombres entiers impairs  $i_k$  et pairs  $p_k$ . Construire une fonction  $IP$  qui transforme une telle liste en une liste de deux listes contenant respectivement les nombres impairs et les nombres pairs triés respectivement par valeurs croissantes.

$$IP : [i_1, p_3, i_m, i_3, p_n, p_2, \dots, p_1, i_2] \mapsto [[i_1, i_2, \dots, i_m], [p_1, p_2, \dots, p_n]]$$

Les valeurs de  $m$  et de  $n$  sont quelconques et les classements des nombres n'obéissent à aucun ordre particulier dans la liste argument.

2. Appliquer cette fonction à la liste  $[3, 1, -2, 5, -7, 2, 0, 1, -2, 4]$ .

## 4.4 Factorisation d'un polynôme

Mettre sous forme exacte de produits de facteurs du premier degré le polynôme

$$x^5 - 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 2x - 3$$

## 4.5 Rodriguez et Hermite

Soit  $H$  la fonction définie par  $H : (n, x) \mapsto (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$

1. Former la fonction  $H$  et exprimer  $H(5, x)$  et  $H(7, x)$  sous forme de polynômes ordonnés par degré décroissant.
2. Calculer  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H(5, x) H(7, x) dx$  et  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H^2(5, x) dx$

## 4.6 Structures des expressions de Maple

1. Transformer *par substitution*  $e_1 = \frac{3 - \sin(3x^3)}{x^3}$  en  $E_1 = \frac{3 - \sin(3x^3)}{x^2}$ .
2. Transformer *par substitution*  $e_2 = \frac{3 - \sin(3x^3)}{x^3 - 3}$  en  $E_2 = \frac{3 - \sin(3x^3)}{x^2 - 2}$ .
3. Transformer *par substitution*  $e_3 = 3 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  en  $E_3 = 3 + \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ .

## 4.7 Constante de Smarandache

1. Construire la liste des nombres premiers  $p_n$  tels que  $2 \leq p_n < 200$ . Vérifier que l'on en dénombre 46.
2. Tracer, sur une même représentation graphique, les 45 fonctions définies par  $p_{n+1}^x - p_n^x - 1$  pour  $x \in [0, 1]$  et où  $p_{n+1}$  et  $p_n$  désignent deux nombres premiers consécutifs de la liste précédente.
3. On remarque que ces fonctions ne possèdent qu'une racine dans l'intervalle  $[\frac{1}{2}, 1]$ . On considère les 45 équations  $p_{n+1}^x - p_n^x = 1$ . En calculant toutes ces racines, trouver la plus petite  $S$  ainsi que les deux nombres premiers associés.

## 4.8 Equation différentielle

Soit l'équation différentielle :

$$y''(x) - \frac{(1+x)y'(x)}{x} + \frac{y(x)}{x} = 0$$

1. Intégrer cette équation différentielle avec les conditions initiales  $y''(0) = 1$  et  $y'(0) = 3$ .
2. Former la fonction  $y$  solution de cette équation avec ces conditions initiales.

## 4.9 Dérivation d'une intégrale

Soit la fonction  $F$  définie par  $F(n, x) = \int_{x^2}^{\sin x} (x^2 - t^2)^n dt$

1. Construire cette fonction.
2. Former de deux façons différentes la fonction  $Fp$ , dérivée de  $F$  par rapport à  $x$ .
3. Calculer  $F(1, x)$  et  $Fp(1, x)$ .
4. Calculer les abscisses des extrema de  $F$  dans l'intervalle  $[0, \frac{5}{4}]$

## 4.10 Laplacien et fonction harmonique

Soit l'opérateur laplacien  $\nabla^2$  en coordonnées cartésiennes.

1. Former l'opérateur  $\nabla^2$ .
2. On pose  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ . Vérifier que  $1/r$  est une fonction harmonique, c'est-à-dire que  $\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = 0$ .

## 4.11 Equation différentielle

Soit l'équation différentielle

$$y''(x) + \left( 1 + \frac{1}{x} \right) y'(x) + \frac{x-1}{x^2} y(x) = 0$$

1. Résoudre cette équation avec les conditions initiales  $y'(1) = -(1 + 6 \exp(-1))$  et  $y(1) = 1 + 4 \exp(-1)$ .
2. Former la fonction solution de ces équations.
3. Tracer la représentation graphique de  $y(x)$  pour  $x \in [-3, +3]$  en limitant les ordonnées dans l'intervalle  $[-15, +15]$ .
4. Donner l'expression exacte de la solution de l'équation  $y(x) = 0$ . En donner une approximation décimale.



# Chapitre 5

## 5.1 Polynômes minimal et caractéristique

Soit la matrice  $\mathbf{A}$  d'un endomorphisme dans une base donnée

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme minimal de l'endomorphisme.
2. Calculer son polynôme caractéristique.
3. Vérifier que le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique.

## 5.2 Endomorphisme idempotent

Soit la matrice  $\mathbf{P}$  d'un endomorphisme dans une base donnée

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer une base du noyau et vérifier le théorème du rang.
2. Montrer que  $\mathbf{P}$  est idempotent.

## 5.3 Théorème d'Hamilton-Cayley

Le théorème d'Hamilton-Cayley énonce que :

**Théorème :** *Toute matrice carrée (tout endomorphisme) vérifie son équation caractéristique.*

Autrement dit, si  $\mathbf{A}$  est une matrice carrée et  $p$  son polynôme caractéristique, on a l'identité matricielle  $p(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$  ( $\mathbf{0}$  désigne ici la matrice nulle de même dimension que  $\mathbf{A}$ ). Former la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

et vérifier le théorème de Hamilton-Cayley pour les matrices  $3 \times 3$ .

## 5.4 Diagonalisation et forme de Jordan

Pour chacune des matrices suivantes, vérifier à l'aide du polynôme minimal si elle peut être diagonalisée puis chercher la forme de Jordan et la matrice de passage.

1.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

## 5.5 Exponentielle d'une matrice. Décomposition de Dunford

Calculer, a) avec une fonction de Maple, b) en détaillant les calculs, les exponentielles des deux matrices.

1.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

## 5.6 Générateurs et algèbre de Lie

On considère les trois matrices

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres et la trace de chacune de ces matrices.
2. Calculer les 3 exponentielles  $R_{x,y,z}$  des trois matrices  $\theta \times J_{x,y,z}$  avec  $\theta \in \mathbb{R}$ .
3. Former l'opérateur crochet de Lie  $(X, Y) \mapsto [X, Y]$  avec  $[X, Y] = X.Y - Y.X$  et vérifier la relation de Jacobi pour  $J_{x,y,z}$ .
4. Calculer les constantes de structure de cette algèbre.

## 5.7 Intégration d'une fraction rationnelle

Soit l'intégrale

$$\int \frac{x^3 + 3x^2 - x + 3}{x^4 + 2x^3 - x^2 + 4x + 12} dx$$

1. Calculer directement cette intégrale.
2. Effectuer une décomposition de seconde espèce de l'intégrand.
3. Utiliser cette décomposition pour calculer l'intégrale.

## 5.8 Aire et périmètre d'une ellipse

Soit l'ellipse d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

1. Tracer une ellipse pour  $a = 2$  et  $b = 1$  en utilisant son équation cartésienne.
2. Calculer sa surface en fonction de  $a$  et de  $b$ .
3. En utilisant ses équations paramétriques  $x(t)$  et  $y(t)$ , calculer son périmètre. On rappelle que la longueur d'un arc de courbe est donnée par

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

## 5.9 Fonction génératrice des polynômes de Legendre

On considère la fonction  $f$ , *fonction génératrice* des polynômes de Legendre, définie par

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2tx + t^2}}$$

1. Former le développement limité de cette fonction à l'ordre  $n$  (on prendra  $n = 7$ ) par rapport à la variable  $t$  autour de 0. Transformer ce développement en un polynôme de degré  $n - 1$  en  $t$ .
2. Vérifier en une seule instruction que tous les coefficients  $a_k(x)$  du polynôme en  $t$  précédent sont identifiables aux polynômes de Legendre de même degré en  $x$ . Le résultat sera présenté sous la forme d'une seule réponse : *true*.

## 5.10 Polynômes de Tchebycheff

On appelle  $T_n(x)$  le polynôme de Tchebycheff de première espèce de degré  $n$ . Former la liste des expressions  $T_n(\cos x)$ , pour  $n$  entier  $\in [0, 10]$ .

**Note :** *Maple utilise l'orthographe **Chebyshev**. Il en existe d'autres. Ceci provient d'une trans-littération incertaine de l'écriture cyrillique.*

1. Vérifier pour les éléments de cette liste que  $T_n(\cos x) = \cos(nx)$ . Ceci est vrai  $\forall n \geq 0$ .
2. On pose  $n = 5$ . Construire, avec un système d'axes orthonormés, une représentation graphique réunissant les éléments suivants :
  - (a) Un demi-cercle de rayon 1 (dans le demi-plan d'ordonnées positives)
  - (b) Les  $n$  points de ce demi-cercle correspondants aux angles  $\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2n}$  pour  $k = 1, 2, \dots, n$ .  
On construira au préalable les deux listes des abscisses et des ordonnées de ces points.
  - (c) Les  $n$  segments de droites figurant les projections de ces points sur l'axe des abscisses.
  - (d) Le polynôme  $T_n(x)$  sur  $[-1, +1]$ .
3. A l'aide des observations faites en 1) et 2), créer un opérateur qui, en fonction de  $n$  entier tel que  $0 \leq n \leq 6$  et de  $x$ , construise le polynôme  $T_n(x)$ . On supposera la forme du coefficient multiplicateur qu'il faut introduire. Chercher de même à exprimer  $T_7(x)$  et  $T_8(x)$ .
4. Calculer les intégrales suivantes

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_3^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \int_{-1}^{+1} \frac{T_4^2(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \int_{-1}^{+1} \frac{T_3(x)T_4(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

## 5.11 Simplification et relation de simplification

1. Calculer  $\sum_{k=0}^{n-1} \sin((2k+1)t)$ .
2. Montrer que le résultat précédent peut s'écrire  $\frac{\sin^2(nt)}{\sin t}$

## 5.12 People quizz

Télécharger le fichier qui se trouve à l'adresse suivante :

<http://www.obs.u-bordeaux1.fr/Enseignement/MAPLE/Quizz.jpg>

1. Lire ce fichier à l'aide d'une fonction de la bibliothèque `ImageTools`.
2. Afficher un aperçu de ce fichier à l'aide d'une fonction de la même bibliothèque.
3. Identifier les personnages.

# Chapitre 6

## 6.1 Matrices et polynômes de Tchebycheff

On considère les matrices carrées de la forme

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2x & 1 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & 2x & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 1 & 2x & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & 1 & 2x & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2x \end{pmatrix}$$

**Attention :**  $t_{i,i} = 2x$  mais  $t_{1,1} = x$ .

1. Ecrire une fonction  $t$  telle que  $t(n)$  soit une matrice  $n \times n$  de ce type.
2. Calculer les déterminants de  $t(n)$  pour  $n = 2, 5, 10$ .
3. Comparer ces expressions avec les polynômes de Tchebycheff  $T_n(x)$  de première espèce pour les mêmes valeurs de  $n$  (Chebyshev).

## 6.2 La spirale de Cornu

1. Rechercher dans Maple les définitions des fonctions Fresnel-sinus  $F_S$  et Fresnel-cosinus  $F_C$ .
2. Ecrire deux fonctions voisines (changement de variable) dépendantes d'un paramètre  $a$  et définies par :

$$\begin{cases} S_a : u \rightarrow a\sqrt{\frac{\pi}{2}}F_S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}u\right) \\ C_a : u \rightarrow a\sqrt{\frac{\pi}{2}}F_C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}u\right) \end{cases}$$

3. Tracer ces deux fonctions pour  $a = 2$  et  $u$  variant de  $-2\pi$  à  $+2\pi$  sur une même représentation graphique.
4. Tracer, dans un repère orthonormé, la courbe de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x(t) = S_a(t) \\ y(t) = C_a(t) \end{cases}$$

toujours pour  $a = 2$  et pour  $t$  variant de  $-2\pi$  à  $+2\pi$ . Cette courbe porte le nom de *spirale de Cornu* ou *Clotoïde*.

5. On désigne  $a$ . Calculer, en fonction de  $a$  et de  $u$ , la longueur  $s$  de l'arc de cette courbe quand le paramètre  $t$  varie de 0 à  $u$  (simplifier  $s$  en imposant  $a$  positif).  
On rappelle que la longueur de cet arc de courbe est donnée par

$$s = \int_0^u \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

6. Calculer, en fonction de  $a$  et de  $u$ , le rayon de courbure  $\rho$  au point  $t = u$  (on simplifiera en imposant  $a$  et  $u$  positifs).  
On rappelle que le rayon de courbure en  $u$  est donné par

$$\rho = \frac{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|} \Bigg|_{t=u}$$

7. Vérifier l'équation intrinsèque (ou équation de Cesàro) de cette courbe :  $2\rho s = a^2$ .

### 6.3 Equation différentielle et portrait de phase

On considère l'équation différentielle

$$y''(t) - \mu(1 - y^2(t))y'(t) + y(t) = 0$$

avec pour conditions initiales  $y(0) = 0.01$  et  $y'(0) = 0$ .

1. Ecrire cette équation différentielle et donner, à l'aide d'une fonction de Maple, la nature de cette équation.
2. Cette équation n'a pas de solution exprimable exactement et la résolution doit se faire numériquement. En posant  $\mu = 0.3$  tracer la représentation graphique de la solution en fonction du temps avec les conditions initiales  $y(0) = 0.01$  et  $y'(0) = 0$  et pour  $t \in [0, 80]$ . Tracer également le portrait de phase, c'est-à-dire  $y'(t)$  en fonction de  $y(t)$ .

### 6.4 Le groupe de Lorentz

Soit  $L$  une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{L}$ , ensemble des matrices  $2 \times 2$  définies par

$$L : \phi \rightarrow \begin{pmatrix} \cosh(\phi) & -\sinh(\phi) \\ -\sinh(\phi) & \cosh(\phi) \end{pmatrix}$$

1. Ecrire l'application  $L$ .
2. Montrer que  $(\mathcal{L}, \cdot)$  est un groupe ( $\cdot$  désigne la multiplication matricielle).

## 6.5 Intégration par la méthode des résidus

Soit l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + a \sin \theta} d\theta \quad a \in ]-1, +1[$$

1. Calculer cette intégrale.
2. On veut effectuer ce calcul à l'aide du théorème des résidus.
  - (a) Ecrire cette intégrale en utilisant la fonction exponentielle.
  - (b) Effectuer le changement de variable  $z = e^{i\theta}$ . Quand  $\theta$  varie de 0 à  $2\pi$ ,  $z$  parcourt dans le plan complexe et dans le sens direct le cercle de rayon unité centré à l'origine. Le calcul devient maintenant celui de l'intégration d'une fonction complexe sur un contour fermé.
  - (c) Calculer les pôles de l'intégrand.
  - (d) Déterminer le nombre de pôles contenus à l'intérieur du contour d'intégration.
  - (e) Calculer le ou les résidus et en déduire la valeur de l'intégrale.

## 6.6 La formule de Râmânujan

On considère la fonction  $R$  définie pour  $n \in \mathbb{N}$  par

$$R : n \rightarrow \frac{9801}{\sum_{i=0}^n \frac{(4i)!(1103+26390i)}{i^{14}396^{4i}}}$$

1. Ecrire cette fonction.
2. Calculer une approximation décimale de  $R(1)$  avec la valeur par défaut du nombre de chiffres significatifs (10).
3. Exprimer de façon exacte ce que pourrait représenter cette valeur approchée.
4. Répéter cette opération avec  $n = 1$ ,  $k = 17$  chiffres significatifs puis  $k = 18$ . Refaire l'opération avec  $n = 2$  et  $k = 25$ ,  $k = 26$ .
5. Après avoir légèrement modifié la fonction  $R$  (les réponses aux questions précédentes montrent à l'évidence pourquoi), construire une fonction d'identification. Effectuer des vérifications à l'aide de cette fonction en répétant les exemples de la question précédente.
6. Estimer le nombre de chiffres significatifs gagnés à chaque étape quand  $n$  augmente de 2 à 5.

## 6.7 Des chaînettes et des chèvres...

Résoudre les équations suivantes

1.  $\alpha = 2\pi f + \sin(\alpha)$  avec  $f = \frac{1}{4}$
2.  $u - k \sinh(u) = 0$  avec  $k = \frac{3}{5}$
3.  $R \left( \pi - \arccos \left( \frac{|R-r|}{d} \right) \right) + r \arccos \left( \frac{|R-r|}{d} \right) + \sqrt{d^2 - (R-r)^2} = \frac{L}{2}$  avec  $R = 10$ ,  $r = 5$  et  $L = 100$ .
4.  $\sin(x) - x \cos(x) = \frac{\pi}{2}$

## 6.8 Tracés des résultats d'une procédure

On considère l'équation  $u - k \sinh(u) = 0$ . Pour chaque valeur de  $k$ , que l'on suppose dans l'intervalle réel  $]1/2, 1[$ , on a une solution  $u(k)$ . Tracer la représentation graphique de la fonction implicite définie par  $k \rightarrow u(k)$

1. En utilisant une liste de listes.
2. A l'aide de l'opérateur solution.

## 6.9 Lissages (ajustements)

On considère trois ensembles de mesures  $\{X_i, Y_i\}$  que l'on veut lisser *au sens des moindres carrés*. Résoudre chacun des trois problèmes avec la fonction de lissage  $y$  proposée.

1.  $y(x) = ax^2 + bx + c$ . Déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$ .

$X_i$	0.12	0.83	1.54	2.03	2.51	3.12
$Y_i$	5.13	3.47	2.35	1.95	1.21	1.25

2.  $y(x) = A + B \cos(\omega x)$ . Déterminer  $A$ ,  $B$  et  $\omega$ .

$X_i$	0.12	0.83	1.54	2.03	2.51	3.12
$Y_i$	1.1	0.5	0.75	1.12	0.8	0.5

3.  $y(x) = \alpha \exp(-\beta x)$ . Déterminer  $\alpha$  et  $\beta$ .

$X_i$	0.12	0.83	1.54	2.03	2.51	3.12
$Y_i$	2.15	1.25	0.59	0.48	0.29	0.17

## 6.10 Vanille, Fraise, Chocolat ?

Dans un repère orthonormé  $Oxy$ , on considère un cercle de rayon  $R$ , dont le centre  $C$  est situé sur l'axe  $y$  avec une ordonnée  $D$ . On supposera, sans chercher à l'expliquer, que  $D > 0$  et  $D > R$ . On considère également une des deux tangentes au cercle au point  $T$ , d'abscisse positive et qui passe par l'origine  $O$  des axes.

1. Former les trois fonctions de  $D$  et de  $R$  qui donnent l'angle  $\widehat{COT}$ , l'abscisse puis l'ordonnée du point de tangence  $T$ .
2. Former la fonction de  $D$  et de  $R$  qui trace le cercle et le segment de droite  $OT$ . Dessiner la figure pour  $R = 2$ ,  $D = 3$ .
3. On passe maintenant à la version 3D du problème en considérant une sphère à la place du cercle et un cône au lieu du segment de droite. Créer la fonction de tracé et dessiner la figure.

# Chapitre 7

## 7.1 Reste intégral d'un développement en série

1. Soit  $S$  la fonction qui à  $(n, x)$  associe le polynôme de degré  $n$  en  $x$  extrait du développement en série de  $\sin x$  autour de 0. Construire  $S(1, x)$ ,  $S(3, x)$  et  $S(5, x)$ .
2. Tracer, sur un même dessin, les représentations graphiques de  $\sin x$ ,  $S(1, x)$ ,  $S(3, x)$  et  $S(5, x)$  pour  $x \in [0, \pi]$ . Utiliser des couleurs distinctes de votre choix pour chaque courbe.
3. Construire la fonction  $R$  définie par

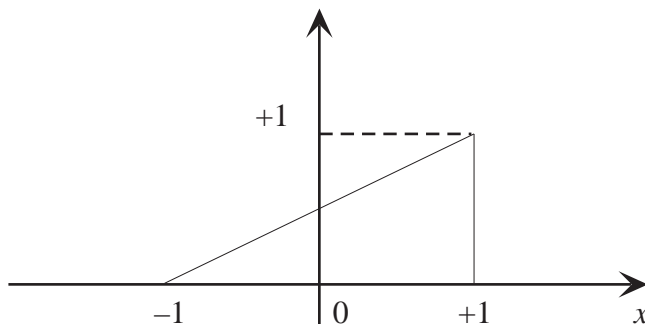
$$R(n, x) = \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n \frac{d^{n+1} \sin t}{dt^{n+1}} dt$$

Montrer en une seule instruction que  $\forall n \in [1, 10]$  (bien évidemment, c'est vrai pour  $\forall n$ ) :

$$S(n, x) + R(n, x) = \sin x$$

## 7.2 Reconstruction d'une fonction par sa série de Fourier

1. a) Créer la fonction  $f$  dont la représentation graphique est donnée ci-dessous (la fonction est nulle pour  $\forall x \notin ]-1, +1[$ ).



- b) Représenter graphiquement cette fonction entre  $-\pi$  et  $\pi$ .
2. a) Calculer les expressions des coefficients de Fourier de cette fonction :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin(nx) dx$$

- b) En déduire les fonctions  $a$  et  $b$  telles que  $a(n) = a_n$  et  $b(n) = b_n$  pour  $\forall n$  entier positif ou nul.
- c) Représenter graphiquement les coefficients de Fourier  $a(n)$  et  $b(n)$  pour les valeurs entières de  $n$  dans l'intervalle  $[0, 20]$ . On utilisera respectivement des petits cercles de couleurs rouge et bleue.
3. Créer la fonction  $SF$  de  $x$  et de  $m$  représentant la série de Fourier tronquée à l'ordre  $m$  (valeur de  $m$  comprise). On rappelle que la série entière de Fourier s'écrit

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

4. Donner sur un même système d'axes, les représentations graphiques de  $f(x)$ ,  $SF(x, 2)$ ,  $SF(x, 10)$  et  $SF(x, 20)$  pour  $x \in [-\pi, +\pi]$ . On utilisera une couleur différente et imposée pour chaque courbe (suivant votre choix). Faire un nouveau tracé pour  $x \in [-3\pi, +3\pi]$  et comparer avec  $f$  les fonctions ainsi reconstruites.

### 7.3 Transformation de Fourier et apodisation

*L'exercice ne demande que l'exécution des calculs. Les explications associées sont données dans la correction*

- Calculer la transformée de Fourier de la fonction constante  $f \equiv 1$ .
- a) Construire la fonction

$$\Pi = (t, T) \mapsto H(T + 2t) + H(T - 2t) - 1$$

où  $H$  est la fonction de Heaviside. Donner la représentation graphique de  $\Pi(t, 1)$ .

- b) Calculer l'expression  $p(\omega, T)$  de la transformée de Fourier de  $\Pi(t, T)$  par rapport à  $t$ . Effectuer le changement de variable  $\omega = 2\pi\nu$  et transformer  $p(\omega, T)$  en une nouvelle fonction  $p$  de  $\nu$  et de  $T$ . La fonction est singulière pour  $\nu = 0$ . Calculer sa limite. On ne tiendra pas compte de cette singularité.
- c) Calculer, en supposant  $T > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(\nu, T) d\nu$$

- d) Tracer  $p(\nu, 1)$  et  $p(\nu, 2)$  sur une même représentation graphique.

3. Construire une expression de  $t$  et de  $T$  qui soit nulle pour  $t < -T/2$  et  $t > T/2$  et égale à

$$1 - 4 \left( \frac{t}{T} \right)^2$$

pour  $-T/2 \leq t \leq T/2$ . En faisant l'hypothèse temporaire (assuming) que  $T > 0$ , convertir cette expression en une combinaison de fonctions de Heaviside et la transformer en une fonction  $W(t, T)$ . Donner une représentation graphique de  $\Pi(t, 1)$  et  $W(t, 1)$ . Calculer

l'expression  $w(\omega, T)$  de sa transformée de Fourier par rapport à  $t$ . La transformer en une fonction  $w(\nu, T)$  avec le changement de variable  $\omega = 2\pi\nu$ . Calculer en supposant  $T > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(\nu, T) d\nu$$

Calculer la limite de cette fonction en  $T = 0$ . Tracer  $p(\nu, 1)$  et  $w(\nu, 1)$  sur une même représentation graphique.

## 7.4 La conjecture de Syracuse

Soit  $n_0$  un entier strictement positif. On forme la suite  $n_k$  telle que

$$n_{k+1} = \begin{cases} 3n_k + 1 & \text{si } n_k \text{ impair} \\ n_k/2 & \text{si } n_k \text{ pair} \end{cases}$$

La *conjecture de Syracuse* (voir correction) énonce que, quelque soit l'entier  $n_0$ , la suite converge vers 1 (elle devient alors cyclique : 1,4,2,1,4,2,1...).

1. Construire une procédure qui forme la suite de Syracuse d'un nombre  $n_0$  donné en argument. On inclura  $n_0$  par convention. La suite se terminera par la valeur 1.
2. Calculer les suites pour  $n_0 = 25, 26, 27, 28$  et  $29$ .
3. On a coutume d'appeler une telle suite une *trajectoire* ou un *vol* et chacune des valeurs une *étape*. Tracer sur deux représentations graphiques différentes les trajectoires de  $n_0 = 26$  et  $n_0 = 27$  en traçant une suite de segments reliant les points d'ordonnées  $(k, n_k)$  et  $(k + 1, n_{k+1})$ .
4. On appelle *altitude maximale* la valeur maximale prise par les étapes d'un vol. Construire un opérateur donnant l'altitude maximale prise au cours d'un vol de  $n_0$ . Calculer les altitudes maximales des vols de  $n_0 = 26$  et  $n_0 = 27$ .
5. On appelle *temps de vol* le nombre de termes d'une suite. Former un opérateur  $T$  qui donne le temps de vol de  $n_0$ . Calculer les temps de vol de  $n_0 = 26$  et  $n_0 = 27$ .
6. Effectuer un tracé sous forme de points de  $T(n_0)$  en fonction de  $n_0$  et pour  $n_0 \in [1, 1000]$ .

## 7.5 Tangentes à la représentation graphique d'une fonction

1. Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x\Gamma(x)$ . Créer cette fonction et déterminer la fonction dérivée  $f'$ . Soit  $\mathcal{C}$  la courbe de la représentation graphique de  $f$  dans l'intervalle des abscisses  $[-3/4, 2]$ . Tracer cette courbe.
2. Déterminer les coefficients de la droite tangente à  $\mathcal{C}$  en  $x = 0$ .
3. Déterminer les pentes des deux tangentes à  $\mathcal{C}$  passant par l'origine des axes.
4. Tracer sur une même représentation graphique la courbe  $\mathcal{C}$  ainsi que les trois tangentes.

## 7.6 Courbe dans le plan complexe

Soit la fonction  $f$  à valeurs complexes de la variable complexe  $z$  :

$$f : z \mapsto \exp(-z/2) \cos z$$

Si la variable  $z$  décrit une courbe  $\mathcal{C}$  dans le plan complexe,  $f$  dessine une autre courbe  $\mathcal{C}'$  dans le plan complexe image.

1. La courbe  $\mathcal{C}$  suivie par  $z$  est ici un cercle de rayon unité centré à l'origine. Représenter sur un même plan complexe le cercle  $\mathcal{C}$  (en rouge) et la courbe  $\mathcal{C}'$  suivie par  $f$  (en bleue). On utilisera 100 points pour définir chaque courbe et un système d'axes orthonormés.
2. Cette représentation graphique montre que  $f$  prend quatre fois des valeurs réelles. Deux sont distinctes et correspondent naturellement aux deux valeurs réelles  $z_1 = 1$  et  $z_2 = -1$ . Les deux autres correspondent à un point double de  $\mathcal{C}'$  auxquelles sont associées deux autres valeurs complexes  $z_3$  et  $z_4$ . Calculer *numériquement* ces deux valeurs, sachant qu'elles sont situées sur le cercle respectivement dans  $[\pi/2, \pi]$  et  $[\pi, 3\pi/2]$ .
3. Tracer sous forme de petits cercles noirs, les points représentatifs de  $z_3, z_4, f(z_3)$  et  $f(z_4)$ .

## 7.7 Localisation des racines d'un polynôme

Le but du problème est de réaliser une vérification graphique de deux théorèmes d'algèbre concernant la localisation approchée des racines d'un polynôme.

Soit  $p$  un polynôme de degré  $n$

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

**Théorème 1** : Les racines de  $p$  sont à l'intérieur ou sur le cercle du plan complexe centré à l'origine et de rayon  $R_1$  tel que :

$$R_1 = 2 \max_{1 \leq i \leq n} \left| \frac{a_{n-i}}{a_n} \right|^{\frac{1}{i}}$$

**Théorème 2** : Les racines de  $p$  sont à l'intérieur ou sur le cercle du plan complexe centré à l'origine et de rayon  $R_2$  tel que :

$$R_2 = \max \left[ \left| \frac{a_0}{a_1} \right|, 2 \left| \frac{a_1}{a_2} \right|, \dots, 2 \left| \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \right|, 2 \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \right]$$

La meilleure localisation est bien sûr celle qui donne le rayon le plus petit mais aucune des deux n'est a priori meilleure que l'autre car le choix dépend des coefficients du polynôme. Soit le polynôme

$$p(x) = 2x^5 - x^4 + \frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + \frac{11}{64}x - \frac{5}{128}$$

Ce polynôme particulier ne sert que pour l'illustration. On répondra donc aux questions suivantes de la façon la plus générale possible. Autrement dit, on devra pouvoir exécuter la feuille de calcul pour un autre polynôme en changeant uniquement celui-ci.

1. Créer le polynôme  $p$ .

2. Les calculs numériques qui suivent seront tous effectués avec quatre chiffres significatifs. Exécuter la commande appropriée.
3. Chercher les évaluations décimales de toutes les racines du polynôme.
4. Déterminer les deux rayons  $R_1$  et  $R_2$ .
5. Tracer les deux cercles et les racines sur une même représentation graphique.

## 7.8 Inverse d'une matrice modifiée

**Rappel** : pour résoudre numériquement un système linéaire il n'est pas nécessaire, ni même souhaitable, de calculer l'inverse de la matrice. Avec des langages de programmation tels que FORTRAN 90/95, C, Ada, etc. on utilisera des algorithmes comme la triangulation de Gauss, la factorisation LU, la Relaxation, le gradient conjugué, etc. Avec Maple on utilisera la fonction **LinearSolve** (qui contient aussi diverses méthodes de résolution).

Cependant le calcul de l'inverse d'une matrice peut s'avérer indispensable dans d'autres circonstances et conduit généralement à des calculs assez lourds dès que la taille devient grande.

*Question* : Si l'on modifie (totalement ou partiellement) une ligne ou une colonne de la matrice initiale, doit-on refaire tous les calculs pour trouver la nouvelle matrice inverse ?

La réponse est *non* et constitue le théorème de *Sherman-Morrison-Woodbury* (S-M-W). Soit  $\mathbf{A}$  une matrice carrée  $n \times n$  non singulière et son inverse  $\mathbf{A}^{-1}$ . Soit  $\mathbf{A}'$  une nouvelle matrice qui ne diffère de  $\mathbf{A}$  que par une ligne ou une colonne. On montre qu'il existe toujours au moins un couple de vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  (de dimension  $n$ ) tels que

$$\mathbf{A}' - \mathbf{A} = \mathbf{u} \mathbf{v}^T$$

Le théorème S-M-W énonce alors que si  $\mathbf{A}'$  n'est pas singulière :

$$\mathbf{A}'^{-1} = (\mathbf{A} + \mathbf{u} \mathbf{v}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1} \mathbf{u} \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{v}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}}$$

1. Soit la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer l'inverse de  $\mathbf{A}$ .

2. Soit la matrice

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Proposer un couple de vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  et vérifier avec MAPLE qu'ils sont adéquats. Calculer l'inverse de  $\mathbf{A}'$  par la méthode S-M-W et vérifier le résultat.

## 7.9 Théorème d'Hadamard-Gerschgorin

Le but du problème est de réaliser une vérification graphique du théorème d'Hadamard-Gerschgorin.

**Théorème :** Soit  $\mathbf{A}$  une matrice carrée quelconque  $n \times n$  dont les termes  $a_{ij}$  sont à valeurs dans  $\mathbb{C}$ . Chaque valeur propre  $\lambda$  de  $\mathbf{A}$  est située à l'intérieur ou sur la frontière d'au moins un des cercles du plan complexe de centre  $a_{ii}$  et de rayon  $\sum_{j \neq i} |a_{ij}|$ , c'est-à-dire

$$\forall \lambda \quad |\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad i \in [1, n]$$

En d'autres termes, toutes les valeurs propres sont à l'intérieur ou sur la frontière du domaine du plan complexe défini par la réunion de ces cercles.

1. Construire une fonction graphique  $g_{\mathcal{C}}$  telle que  $g_{\mathcal{C}}(x_0, y_0, R)$  trace un cercle de centre  $(x_0, y_0)$  et de rayon  $R$ .
2. Pour illustrer ce théorème on considèrera la matrice définie par

$$\mathbf{A} = \mathbf{M} + \frac{i}{4}\mathbf{M} \quad \text{où} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Former la matrice  $\mathbf{M}$  puis la matrice  $\mathbf{A}$

3. En utilisant une fonction de MAPLE, assigner à  $n$  la dimension de  $\mathbf{A}$  (traiter le problème en fonction de la variable  $n$  et non pour la valeur particulière 4).
4. Représenter sur un même graphique les  $n$  valeurs propres et les  $n$  cercles de Gerschgorin afin de vérifier que le théorème est vrai pour le cas particulier de la matrice  $\mathbf{A}$ .

## 7.10 Système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants et exponentielle d'une matrice

On définit l'exponentielle d'une matrice carrée  $\mathbf{A}$  par

$$\exp(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^k}{k!} \quad \text{avec} \quad \mathbf{A}^0 = \mathbf{I} \quad \forall \mathbf{A}$$

Supposons pour simplifier que  $\mathbf{A}$  soit une matrice  $n \times n$  diagonalisable de valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Il existe alors deux matrices  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{\Lambda}$  formées respectivement des vecteurs propres et des valeurs propres de  $\mathbf{A}$  et telles que  $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}$ . Alors

$$\mathbf{A}^k = \overbrace{(\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1})(\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1}) \dots (\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1})}^k = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}^k\mathbf{V}^{-1}$$

et

$$\exp(\mathbf{A}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^{-1})^k}{k!} = \mathbf{V} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{\Lambda}^k}{k!} \right) \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{V} \exp(\mathbf{\Lambda}) \mathbf{V}^{-1}$$

La matrice  $\exp(\mathbf{\Lambda})$  s'écrit

$$\exp(\mathbf{\Lambda}) = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^k}{k!} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \exp \lambda_i & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \exp \lambda_n \end{pmatrix}$$

Soit la matrice

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} t & -2t \\ t & t \end{pmatrix}$$

avec  $t \in \mathbb{R}$ .

1. Calculer de plusieurs façons la matrice  $\mathbf{\Lambda}$ .
2. Calculer la matrice  $\exp(\mathbf{\Lambda})$  puis  $\exp(\mathbf{A})$  en utilisant les définitions données précédemment.
3. L'équation différentielle  $y'(t) = \alpha y(t)$  avec la condition initiale  $y(0) = y_0$  a pour solution  $y(t) = y_0 \exp(\alpha t)$ . Un système d'équations différentielles à coefficients constants peut s'écrire sous forme matricielle  $\mathbf{Y}'(t) = \mathbf{M}\mathbf{Y}(t)$  où  $\mathbf{Y}(t)$  est le vecteur des solutions. Si  $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{Y}_0$  on peut alors montrer que  $\mathbf{Y}(t) = \exp(\mathbf{M}t)\mathbf{Y}_0$ .

Soit le système suivant

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_1(t) - 2y_2(t) \\ y_2'(t) = y_1(t) + y_2(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$$

Utiliser les résultats précédents pour résoudre ce système.

4. Comparer cette solution avec celle d'une résolution classique.

## 7.11 Perspective

On utilise principalement deux sortes de perspectives pour le dessin : la perspective dite "cavalière" et la perspective dite "centrale". C'est de cette dernière dont il est question ici. Elle est illustrée sur la figure ci dessous.

Un observateur N regarde "l'espace des objets" et dessine ce qu'il voit sur le "plan image". Son œil est placé à une hauteur  $h$  au dessus du sol et à une distance  $d$  du plan image. On peut résumer la méthode en imaginant que l'on est assis au bout d'une table (le "sol" étant alors le dessus de la table), l'œil à une hauteur  $h$  au dessus de cette table. On matérialise le plan image par une vitre posée verticalement sur la table à une distance  $d$  de l'œil (fenêtre de Dürer). En visant les contours des objets avec la pointe du stylo on dessine sur la vitre.

Les points des "objets" observés sont repérés dans le trièdre OXYZ. **Pour simplifier, on ne considérera que des objets plans posés au sol.** Chaque point  $M$  de coordonnées  $(X, Y)$  possède une image  $m$  de coordonnées  $(x, y)$  dans le repère  $Oxy$ .



3. On considère un cercle de centre  $(X = 1, Y = 2)$  et de rayon 2.
  - a -Tracer le cercle objet en utilisant son équation cartésienne.
  - b -Tracer l'image de ce cercle et déterminer la nature de cette figure.
4. Quelle est maintenant l'image d'une parabole dont le sommet est dirigé vers l'observateur et dont les branches s'éloignent vers l'horizon ?
  - a -Tracer l'image de la parabole d'équation  $Y - 3X^2 = 0$ . Déterminer la nature de cette figure.
  - b -Tracer l'image de la parabole d'équation  $Y - 3(X - 1)^2 - \frac{1}{2} = 0$ . Déterminer la nature de cette figure.



# Chapitre 8

## 8.1 Ajustement d'une ellipse

Sur une feuille de papier on a mesuré les coordonnées d'une série de points

$X_i$	-0.98	-0.27	-0.15	0.25	0.33	0.92	1.21	2.01	2.15	2.21
$Y_i$	2.12	-0.95	-1.42	1.75	-1.94	1.25	0.82	-3.15	-0.61	-3.25

On sait que ces mesures sont inévitablement entâchées d'erreurs et que ces points devraient se trouver sur une ellipse.

1. Ajuster au sens des moindres carrés une ellipse en utilisant son équation cartésienne. Tracer les points de mesures et l'ellipse.
2. Chercher les équations paramétriques de l'ellipse ainsi déterminée.

## 8.2 Système d'équations non linéaires

Soit le système d'équations

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + y^2 = 4 \\ e^{xy} + y = 1 \end{cases}$$

Trouver, en utilisant une méthode rationnelle de recherche (c'est à dire sans compter sur le hasard!), les  $n$  approximations décimales des solutions réelles de ce système.

## 8.3 Distribution des nombres premiers

Parmi les entiers compris entre 2 et  $n = 6$  il y a trois nombres premiers qui sont 2, 3 et 5. On en dénombre 8 inférieurs ou égal à  $n = 19$  et 25 pour  $n = 100$ .

1. Construire une fonction  $\pi$  qui associe au nombre entier  $n$  le nombre de nombres premiers que l'on rencontre entre 2 et  $n$  en utilisant une méthode de dénombrement : dans la liste des nombres entiers compris entre 2 et  $n$  on comptera tout simplement le nombre de nombres premiers (y compris 2 et éventuellement  $n$ ). On demande de trouver une définition de la forme `pi :=(n : :posint)->...`. On pourra vérifier le bon fonctionnement de la fonction avec les valeurs indiquées dans l'introduction.
2. On veut donner une représentation graphique de cette fonction pour les entiers entre 100 et 3000. Etant un peu longue à calculer pour  $n$  grand, on souhaite la tracer seulement pour des valeurs de  $n$  allant de 100 en 100 : 100, 200, ..., 2900, 3000. Mettre en mémoire

dans une liste ces valeurs de  $n$ . Calculer les valeurs de  $\pi(n)$  que l'on mettra en mémoire dans une liste  $\mathbf{p}$ . Garder en mémoire ce tracé graphique sous le nom  $\mathbf{Npr}$  (utiliser des petits cercles rouges comme symboles). Tracer ensuite cette représentation graphique.

3. On appelle fonction *Logarithme intégral* la fonction définie pour  $x > 1$  par

$$\text{Li}(x) = VP \int_0^x \frac{1}{\ln t} dt$$

( $VP$  = valeur principale au sens de Cauchy). Cette fonction est connue de MAPLE sous le nom  $\mathbf{Li}$ . La représenter sur l'intervalle  $[100, 3000]$  avec  $\mathbf{Npr}$ .

4. On considère une nouvelle fonction  $\pi$  définie pour  $n$  entier  $> 0$  par

$$\pi(n) = \sum_{k=2}^n \left[ \frac{(k-1)! + 1}{k} - \left\lfloor \frac{(k-1)!}{k} \right\rfloor \right]$$

où  $\lfloor \dots \rfloor$  désigne la partie entière d'un nombre. Calculer, avec les mêmes valeurs de  $n$  que pour la liste  $\mathbf{p}$ , la liste  $\mathbf{p\_0}$  des valeurs de la nouvelle fonction  $\pi$  (utiliser la fonction  $\mathbf{add}$ ). Comparer  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{p\_0}$ .

5. Construire la liste  $\mathbf{N}$  des 7 premiers nombres premiers. On considère la fonction  $Np$  définie pour  $n$  entier  $> 0$  par

$$Np(n) = 1 + \sum_{k=1}^{2^n} \left[ \left\lfloor \frac{n}{1 + \pi(k)} \right\rfloor^{\frac{1}{n}} \right]$$

Former cette fonction (utiliser la fonction  $\mathbf{add}$ ) et calculer pour  $n$  entier  $\in [1, 7]$  la liste  $\mathbf{M}$  des valeurs de  $Np(n)$ . Comparer  $\mathbf{N}$  et  $\mathbf{M}$ .

6. Soit le polynôme  $P(n) = n^2 - n + 41$ . Construire la suite des  $P(n)$  pour  $n$  entier  $\in [1, 40]$  et vérifier que tous ces nombres sont premiers.

## 8.4 Carré magique

On appelle carré magique un tableau carré de valeurs entières strictement positives et toutes distinctes dont les sommes des éléments suivant les deux diagonales, chacune des lignes et chacune des colonnes sont toutes identiques (gravés sur une plaque, ces carrés magiques étaient autrefois utilisés comme talismans pour guérir les maladies, soigner les morsures venimeuses ou encore pour faciliter les accouchements...).

1. Ecrire une procédure ayant pour nom *Magique* et recevant comme unique argument le carré dont on veut vérifier la propriété. Le tableau devra être donné sous la forme d'un objet MAPLE de type *Matrix*. On effectuera dans la procédure les vérifications nécessaires. On impose que la procédure renvoie la valeur logique *true* si le carré est magique (et bien sûr *false* dans le cas contraire).
2. Tester la procédure avec les carrés magiques suivants ainsi que sur des carrés non magiques.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 14 & 15 & 1 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 16 & 2 & 3 & 13 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 & 22 & 5 & 8 & 23 \\ 6 & 12 & 11 & 16 & 20 \\ 25 & 17 & 13 & 9 & 1 \\ 24 & 10 & 15 & 14 & 2 \\ 3 & 4 & 21 & 18 & 19 \end{bmatrix}$$

## 8.5 Singularité mobile d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle

$$y'(x) = \frac{y^2(x)}{1 - xy(x)}$$

1. Résoudre cette équation pour la condition initiale  $y(0) = 1$ .
2. Transformer la solution obtenue en une fonction  $y$ .
3. Donner la représentation graphique de  $y$  pour des valeurs de  $x \in [-1, +1]$ .
4. Comme on peut le constater, la fonction semble présenter une singularité pour une valeur de la variable voisine de 0.4. Le terme *singularité* ne signifie pas nécessairement, comme nous le verrons, que la solution tende vers  $\pm\infty$ .

Lorsque les valeurs de la variable pour lesquelles apparaissent ces singularités, dépendent des conditions initiales choisies, on les appelle *singularités mobiles* par opposition aux singularités dites *essentielles* liées à l'équation différentielle elle-même. Il s'agit ici d'une singularité mobile. On va maintenant chercher la valeur de la variable pour laquelle cette singularité apparaît pour l'équation et la condition initiale proposée.

- a) Développer à l'ordre 10 la solution précédente et former la liste des coefficients jusqu'à la puissance 8.
  - b) Créer la fonction  $a$  telle que  $a(n) = \frac{(n+1)^{n-1}}{n!}$ . Former la liste des  $a(n)$  pour  $n \in [0, 8]$ .
  - c) Vérifier par une instruction simple que les deux listes sont égales. On admettra que les coefficients sont égaux  $\forall n$ .
  - d) Calculer le rayon de convergence  $R$  de la série en calculant  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a(n)}{a(n+1)} \right|$ . Tracer sur une même représentation graphique  $y(x)$  et la droite d'abscisse  $R$  parallèle à l'axe des ordonnées.
5. On cherche maintenant à préciser la nature de la solution en la cherchant sous la forme de sa réciproque  $x = f(y)$ .
    - a) Résoudre à nouveau l'équation différentielle en demandant une solution sous une forme implicite (sous forme d'une équation fonctionnelle).
    - b) Calculer la valeur de la constante qui apparaît pour que la solution satisfasse la condition initiale.
    - c) En déduire la fonction  $f$  et la représenter graphiquement dans l'intervalle  $[10^{-3}, 10]$  et en limitant l'intervalle des ordonnées à  $[-1/2, +1/2]$ .
    - d) En déduire la valeur de l'abscisse  $x = R$  de la singularité qui apparaissait lorsque la solution était écrite sous la forme  $y(x)$ .

## 8.6 Diffraction à l'infini par une fente rectangulaire

Une fente transparente de centre  $O$ , de longueur  $L$  suivant la direction  $(O, y)$  et de largeur  $l$  ( $l \ll L$ ) suivant la direction  $(O, x)$ , est éclairée par un faisceau monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$ , sous une incidence normale :

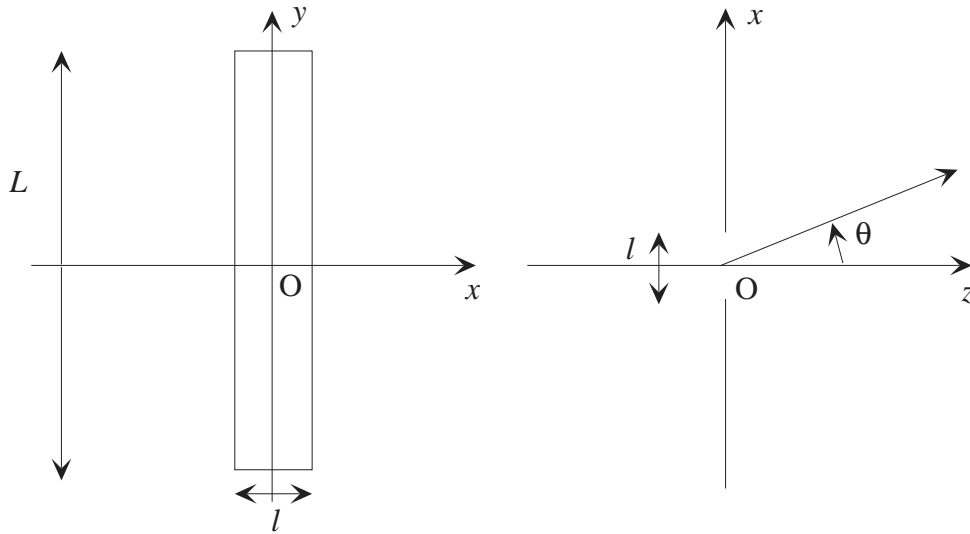


FIG. 8.1 – Coordonnées utilisées

On place contre cette fente un *filtre gris* de coefficient  $T$  de transmission en amplitude tel que

$$T(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

On montre que l'amplitude complexe  $A$  de la vibration totale diffractée à l'infini dans la direction  $\theta$  est donnée par

$$A = \frac{S}{l} e^{i(\omega t + \varphi_0)} \int_{-l/2}^{+l/2} T(x) e^{i\varphi} dx$$

où  $S$  est l'amplitude réelle de l'onde incidente,  $\varphi$  le déphasage défini par :

$$\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda} x \sin \theta$$

$\omega$  étant la pulsation de l'onde,  $t$  le temps et  $\varphi_0$  un terme constant de déphasage.

### 8.6.1 Amplitude de l'onde diffractée

1. Former l'expression de  $\varphi$  puis la fonction  $T$ . Montrer que

$$A = \frac{2S e^{i(\omega t + \varphi_0)} \lambda^2 \cos\left(\frac{\pi l \sin \theta}{\lambda}\right)}{\pi (\lambda^2 + 4l^2 \cos^2 \theta - 4l^2)}$$

2. Effectuer le changement de variable  $u = \frac{\pi}{\lambda} l \sin \theta$  dans  $A$  et montrer que

$$A = \frac{2\pi S e^{i(\omega t + \varphi_0)} \cos(u)}{\pi^2 - 4u^2}$$

### 8.6.2 Calcul de l'intensité diffractée

L'intensité diffractée  $I_d$  est donnée par  $|A|^2$ . Montrer que

$$I_d = \frac{4S^2\pi^2 \cos^2 u}{(4u^2 - \pi^2)^2}$$

### 8.6.3 Représentation graphique de l'intensité diffractée

1. Calculer  $I_d$  pour  $u = 0$  et former l'expression  $f$  de l'intensité diffractée normalisée à 1 pour  $u = 0$ .
2. Représenter  $f$  sur l'intervalle  $[-3\pi, +3\pi]$  puis sur un intervalle à déterminer (visuellement) permettant de représenter les trois premiers maxima secondaires pour  $u > 0$ .

### 8.6.4 Maxima de l'intensité diffractée

1. Donner, sous forme d'une liste, les approximations numériques de  $u$  correspondant aux trois premiers maxima secondaires de l'intensité diffractée.
2. Calculer les valeurs numériques, avec trois chiffres significatifs, des rapports au maximum primaire des trois premiers maxima secondaires de l'intensité diffractée.

## 8.7 La grille de Vigénère

*Blaise de Vigénère, XVI-ième siècle*

La grille de Vigénère est une méthode de chiffrement de messages par une clé. Pour simplifier, nous supposons que toutes les chaînes de caractères qui composent les messages ou la clé de codage seront construites avec des lettres majuscules et les caractères "espace", virgule, apostrophe et point d'exclamation. Le but du problème est de construire une procédure permettant le codage ou le décodage de messages.

La méthode consiste tout d'abord à construire une grille de codage, en fait une matrice ou un tableau (array) carré  $M$ , ayant la forme suivante, chaque ligne étant obtenue par décalage d'un caractère vers la gauche de la ligne précédente. La première ligne contiendra l'alphabet plus les caractères cités plus haut :

```

      ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ , ' !
      BCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ , ' ! A
      CDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ , ' ! AB
      ....
      LMNOPQRSTUVWXYZ , ' ! ABCDEFGHIJK
      ....
M =  RSTUVWXYZ , ' ! ABCDEFGHIJKLMNOPQ
      STUVWXYZ , ' ! ABCDEFGHIJKLMNOPQR
      ....
      , ' ! ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
      ' ! ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ ,
      ! ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ , '

```

En réalité il n'est pas nécessaire de considérer ni l'ordre alphabétique ni cette construction par décalage ; il suffit de construire  $n$  lignes toutes différentes contenant toutes les  $n$  caractères souhaités (ce que l'on réalise simplement par la méthode proposée). Cependant, il est évidemment indispensable que la grille soit identique pour le codage et le décodage.

Avant de décrire la méthode de codage/décodage et afin de construire progressivement la procédure complète, on procèdera par étape. Pour construire la matrice de codage on utilisera la liste des caractères :

```
["A","B","C",...,"X","Y","Z"," ","'","",",","!"]
```

Cette liste étant un peu fastidieuse à écrire avec ses guillemets et ses virgules, on va la construire à partir de la chaîne de caractères :

```
> alphabet := "ABCDEFGH...XYZ ',!";
```

(Attention : ne pas oublier l'espace entre Z et ').

1. Construire à partir de la chaîne "alphabet" la liste des caractères.
2. Construire une procédure `p1()` donnant comme résultat le tableau ou la matrice de codage (on intégrera la construction précédente dans la procédure).
3. La clé de codage est une chaîne de caractères (secrète) que nous supposons être **SECRET**. Pour coder on établit d'abord une correspondance entre les caractères du message en écrivant sous le message une chaîne de caractères (la chaîne de codage) formée par la répétition de la clé de codage :

```
LES GAULOIS SONT DANS LA PLAINE
SECRETSECRETSECRETSECRETSECRET
```

On forme alors les couples en associant les caractères superposés verticalement. Le premier couple (L,S) permet de déterminer le codage du premier caractère en cherchant dans la grille de codage  $M$ , la ligne  $i$  commençant par L et la colonne  $j$  commençant par S, le résultat étant le caractère  $M_{ij} = !$ . Le deuxième couple (E,E) donne ainsi I, le quatrième ( ,R) donne N et ainsi de suite.

En récupérant par "copier-coller" la procédure précédente et en la complétant, construire une procédure de codage `p2(cle,texte)`. L'argument `texte` sera la chaîne de caractères **LES GAULOIS SONT DANS LA PLAINE** que l'on codera en utilisant la clé **SECRET**. Notez qu'il n'y a aucun inconvénient à construire la chaîne de caractères utilisée pour le codage un peu plus longue que la chaîne à coder.

4. Pour décoder un message on procède de façon analogue au codage en établissant le même type de correspondance mais en inversant l'ordre :

```
SECRETSECRETSECRETSECRETSECRET
!IUNKTIP...
```

A l'aide du premier couple (S, !), on cherche la ligne commençant par S puis la colonne de cette ligne contenant !. On "remonte" ensuite le long de cette colonne jusqu'à la première ligne, ce qui donne le caractère L. Le couple (E,I) donnera E et ainsi de suite.

Construire la procédure `Vigenere(i,cle,texte)` qui code `texte` si  $i=1$  et décode si  $i=2$ . Vérifier la procédure en codant et décodant un message avec une clé de votre choix.

## 8.8 Rayonnement du corps noir

On appelle *corps noir* un concept physique idéalisé dans lequel on considère la matière en strict équilibre (stationnaire) avec le rayonnement. Ce modèle théorique est souvent une bonne approche de beaucoup de situations réelles. Max Plank a montré que la distribution de la densité volumique d'énergie du rayonnement du corps noir *par intervalle de fréquence*  $[\nu, \nu + d\nu]$  est donnée par la loi

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

où  $k$ ,  $h$  et  $c$  sont les constantes fondamentales de la physique. Cette expression montre en particulier que cette distribution ne dépend que de la température  $T$  pour une fréquence donnée. Il faut cependant prendre garde au fait que si l'on écrit cette loi en terme d'intervalles de longueur d'onde  $[\lambda, \lambda + d\lambda]$  (et non plus  $[\nu, \nu + d\nu]$ ) on obtient une loi  $l(\lambda, T)$  mathématiquement différente de celle obtenue par un simple changement de variable  $\nu = c/\lambda$  dans  $u$ . En particulier, chacune de ces lois possède un maximum unique mais la fréquence du maximum  $\nu_{max}$  de  $u$  (pour une température donnée) ne correspond pas à la longueur d'onde  $\lambda_{max}$  du maximum de  $l$  en faisant le changement de variable  $\lambda_{max} = c/\nu_{max}$ . Cet apparent paradoxe vient de ce que les lois  $l$  et  $u$  ne représentent pas les mêmes quantités physiques. La quantité qui se conserve pour le changement de variable  $\lambda = c/\nu$  est la densité d'énergie par intervalle spectral :

$$u(\nu, T)d\nu = -l(\lambda, T)d\lambda$$

1. a) Construire les deux fonctions  $\nu : \nu \mapsto c/\lambda$  et  $u$ .  
b) En déduire la fonction  $l$ .
2. a) Déterminer en fonction de  $T$ ,  $k$ ,  $c$  et  $h$  la fréquence  $\nu_{max}$  du maximum de  $u$ . On pourra constater que la fréquence de ce maximum s'exprime par une loi de la forme  $w_{nu} \times T$ . Calculer l'expression de  $w_{nu}$ .  
b) Déterminer de même la longueur d'onde  $\lambda_{max}$  du maximum de  $l$ . La longueur d'onde de ce maximum s'exprime par une loi de la forme  $w_{lambda}/T$  (dite *loi de Wien*). Calculer l'expression de  $w_{lambda}$ . On pourra constater que les maxima ne coïncident pas car  $\lambda_{max} \neq c/\nu_{max}$ .
3. On se place dans le système d'unités SI. A l'aide de la base de données des constantes scientifiques de Maple  
a) calculer les valeurs de  $w_{nu}$  et  $w_{lambda}$  avec leurs unités respectives.  
b) calculer les longueurs d'onde *en microns* des maxima des deux fonctions  $u$  et  $l$  pour un corps humain que l'on assimilera à un corps noir à 37°C.  
c) calculer la température à laquelle il faut porter la matière pour que le maximum de  $l$  soit centré dans la bande du rayonnement visible? (choisir une longueur d'onde approximative).
4. a) Montrer que les unités de  $l$  sont des  $[J \times m^{-4}]$ .  
b) Tracer sur une même représentation graphique limitée en ordonnées à 7000  $[J \times m^{-4}]$ ,  
- les distributions de  $l$  pour trois températures, 1200 K, 1600 K et 2000 K et pour une bande de longueurs d'onde allant de 0 à 6 $\mu$ .

- la loi de Wien pour des températures variant de 900 K à 2100 K.
  - deux traits verticaux représentant les limites (approximatives) de la bande du rayonnement visible.
5. Calcul de la *constante de Stefan*.
- a) Après avoir désassigné les constantes physiques  $c$ ,  $h$  et  $k$ , calculer, en intégrant la loi en fréquence ou la loi en longueur d'onde, l'expression exacte de la densité volumique d'énergie totale  $U$  du rayonnement du corps noir à la température  $T$ .
- b) On montre que la puissance radiative totale  $W$  émise par unité de surface du corps noir est de la forme  $cU/4$ . La quantité  $W$  étant de la forme  $\sigma \times T^4$ , calculer la constante  $\sigma$ , dite *constante de Stefan*. Calculer sa valeur numérique avec ses unités dans les systèmes SI et CGS.

## 8.9 L'étrange statistique de Newcomb-Benford

1. Construire un opérateur (fonction ou procédure) qui extrait le premier chiffre significatif (le premier chiffre différent de 0 le plus à gauche) d'un nombre *non nul*, entier, rationnel ou exprimé en virgule flottante. L'appliquer à chacun des nombres de la liste

$$L = [10, 3.56, 567, 0.0456, 0.506 \times 10^{35}, 29/7, \pi + 2, \sqrt{27}]$$

L'appliquer ensuite sur  $-L$ .

2. Construire un nouvel opérateur (utilisant le précédent) qui donne la liste des fréquences d'apparition de chacun des 9 chiffres (0 exclu) de la base décimale comme premier chiffre significatif quand on l'applique à une liste de nombres. L'appliquer pour vérification à la liste  $L$ .
3. Construire une liste  $R$  de  $N = 2000$  nombres pseudo-aléatoires uniformément répartis sur l'intervalle  $]0, 10^5]$ . Calculer la liste des fréquences et vérifier (par un simple examen visuel) que la fréquence de chacun des neuf chiffres  $\{1, \dots, 9\}$  comme premier chiffre significatif est bien égale à  $1/9$  aux fluctuations statistiques près.
4. Construire
- la liste  $F_1$  des neuf fréquences pour la liste  $R$  multipliée par  $\exp(1)$ .
  - la liste  $F_2$  des neuf fréquences pour la liste  $R$  divisée par  $\pi$ .
  - la liste  $F_3$  des neuf fréquences pour une liste de  $N$  nombres pseudo-aléatoires répartis sur  $[0, 31457]$ .
  - la liste  $F_4$  des neuf fréquences pour la liste des carrés des  $N$  premiers entiers.
  - la liste  $F_5$  des neuf fréquences pour la liste des inverses des cubes des  $N$  premiers entiers.
  - la liste  $F_6$  des neuf fréquences pour la liste des  $N$  nombres  $e^{-(\pi+n-N/2)}$ , avec  $n$  entier  $\in [1, N]$ .
  - la liste  $F_7$  des neuf fréquences pour une liste de  $N$  nombres pseudo-aléatoires qui suivent une loi Normale de moyenne 0 et d'écart type 2.

Qu'en concluez-vous ?

5. Construire la liste égale à la moyenne des listes  $F_1$  à  $F_7$ . On considère la loi de probabilité (probabilité pour que le chiffre  $\nu$  soit  $n$ , 0 exclu)

$$P_{\text{NB}}(\nu = n) = \log_{10} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$$

Comparer sur une représentation graphique la statistique des fréquences de la liste moyenne et la loi  $P_{\text{NB}}$ .



# Chapitre 9

## 9.1 Points de Lagrange d'un système gravitationnel

On va étudier un exemple du *problème restreint des trois corps* en interaction gravitationnelle. Soient deux corps de masses respectives  $m_1$  et  $m_2$  en orbite circulaire autour de leur centre de masse  $O$  et un troisième corps de masse  $m$  négligeable devant  $m_1$  et  $m_2$ . Nous allons montrer qu'il existe cinq positions de l'espace où les forces gravitationnelles que les deux premiers corps exercent sur le troisième compensent la force centrifuge qui s'exerce sur ce troisième corps. Le repère  $(0,x,y)$  utilisé pour cette étude est représenté sur la figure 9.1. Il s'agit d'un repère tournant avec les deux masses  $m_1$  et  $m_2$ .

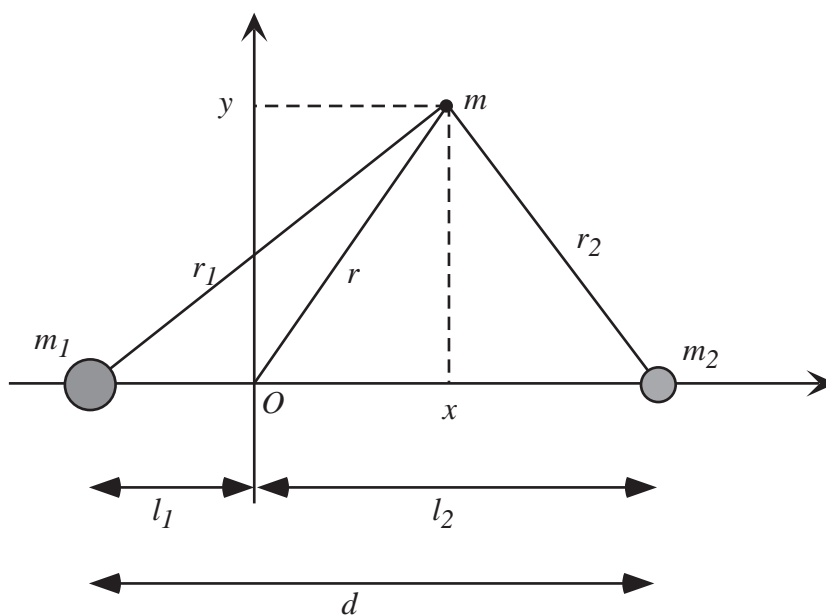


FIG. 9.1 – Coordonnées des trois corps

### 9.1.1 Energie potentielle totale

1. L'équation de Kepler pour  $m_1$  et  $m_2$  est la suivante :

$$\frac{T^2}{d^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}$$

où  $T$  est la période et  $G$  la constante de la gravitation. Etablir l'expression de  $T$ .

2. L'énergie potentielle  $U$  de la masse  $m$  dans le système tournant est donnée par l'expression :

$$U = -\frac{m}{2} \left( \frac{2\pi r}{T} \right)^2 - G \frac{mm_1}{r_1} - G \frac{mm_2}{r_2}$$

Ecrire l'expression de  $U$ .

3. En utilisant les indications de la figure 9.1, calculer l'expression  $U_{xy}$  donnant l'énergie potentielle  $U/(Gm)$  en fonction de  $x$ ,  $y$ ,  $l_1$  et  $l_2$ .
4. Nous étudions maintenant un cas particulier. On appellera  $u_{xy}$  l'expression prise par  $U_{xy}$  quand  $l_1 = 1$ ,  $l_2 = 2$ ,  $m_1 = 4$ ,  $m_2 = 2$ . Calculer  $u_{xy}$ .

### 9.1.2 Représentation graphique de l'énergie potentielle

1. Représenter graphiquement l'expression  $|u_{xy}|$  pour  $x \in [-5, +5]$  et  $y \in [-3, +3]$ . On utilisera une grille de calcul  $[50, 50]$  et des ordonnées comprises entre 0 et 20.
2. Calculer l'expression  $u_{x0}$  de  $u_{xy}$  pour  $y = 0$ .
3. Représenter l'expression  $|u_{x0}|$  pour  $x \in [-6, +7]$  et en limitant les ordonnées entre 0 et 50.
4. À l'évidence,  $|u_{x0}|$  présente des singularités que l'on déterminera.

### 9.1.3 Recherche des points de Lagrange

Les points de Lagrange sont les positions d'équilibre où la résultante des forces est nulle. Ils sont donnés par les coordonnées des intersections des courbes obtenues à partir des équations  $\frac{dU_{xy}}{dx} = 0$  et  $\frac{dU_{xy}}{dy} = 0$ .

1. Ecrire les deux équations  $\frac{du_{xy}}{dx} = 0$  et  $\frac{du_{xy}}{dy} = 0$ .
2. Résoudre, pour les solutions réelles, le système formé par ces deux équations (exactement ou numériquement suivant le cas).

### 9.1.4 Représentation graphique des points de Lagrange

Mettre en mémoire

- la représentation graphique de la solution de  $\frac{du_{xy}}{dx} = 0$  pour  $x \in [-5, +5]$  et  $y \in [-5, +5]$  en utilisant une grille de calcul de  $50 \times 50$  points.
- la représentation graphique de la solution de  $\frac{du_{xy}}{dy} = 0$  pour  $x \in [-5, +5]$  et  $y \in [-5, +5]$  en utilisant une grille de calcul de  $50 \times 50$  points.
- la représentation graphique de la liste des points solutions déterminés en 9.1.3
- la représentation graphique des masses  $m_1$  et  $m_2$ .

Représenter sur une même figure l'ensemble de ces tracés.

### 9.1.5 Recherche de la solution manquante

1. Tracer le même dessin que précédemment, mais en utilisant des axes sous forme de cadre. On pourra remarquer qu'il manque une solution.
2. Déterminer numériquement cette solution.
3. Reproduire le dessin précédent (avec axes) en montrant tous les points de Lagrange.

### 9.1.6 Les points de Lagrange $L_4$ et $L_5$

Reprendre le problème sans introduire les valeurs numériques et simplement vérifier (sans chercher à résoudre le système) que  $x = (l_2 - l_1)/2$  et  $y = \pm(l_2 + l_1)\sqrt{3}/2$  sont des solutions du problème. On appelle  $L_4$  et  $L_5$  les points associés à ces solutions. Quelle est la particularité de ces solutions ?

### 9.1.7 Application au système Soleil-Terre

Calculer les coordonnées des points de Lagrange du système Soleil-Terre sachant que la masse du Soleil est  $1.9891 \times 10^{30}$  kg et celle de la Terre  $5.9742 \times 10^{24}$  kg. La distance Soleil-Terre est, par définition, de une unité astronomique.

## 9.2 Transition vers le chaos par cascades de bifurcations

On sait qu'une équation  $g(x) = h(x)$  mise sous la forme  $x = f(x)$  permet de créer un schéma itératif  $x_i = f(x_{i-1})$  et que, sous certaines conditions de convergence, les valeurs  $x_i$  tendent vers la ou une des solutions de l'équation (itérations dites du *point fixe*). Dans ce problème, on va étudier le comportement des itérations associées à l'équation  $x = f_k(x)$  où  $f_k$  est la fonction, dépendante du paramètre  $k > 1$ , définie par

$$f_k : x \mapsto kx(1 - x)$$

On verra comment les itérations associées à cette application complètement déterministe passent progressivement, en fonction de  $k$ , d'un régime simple et stable à un comportement chaotique.

### 9.2.1 Etude d'un cas stable pour $k = 2.8$

1. Définir la fonction  $f_k : x \mapsto kx(1 - x)$ .
2. Après avoir posé  $k = 2.8$ , calculer les solutions de l'équation  $x = f_k(x)$ .
3. Visualiser les solutions de cette équation en traçant sur un même dessin les représentations graphiques de  $x$  et de  $f_k(x)$  pour  $x \in [0, 1]$ .

Quelque soit  $k$  il y aura toujours une solution  $x = 0$  et on ne s'intéressera dans la suite du problème qu'à la (ou les) solution(s) non nulle(s).

4. On sait que le processus itératif  $x_i = f_k(x_{i-1})$  sera convergent si  $|\frac{df_k(x)}{dx}| < 1$  au voisinage de la solution. Vérifier que le processus est convergent en montrant que  $|f_k'(x_k)| < 1$  où  $x_k$  est la solution non nulle.

5. On veut créer une fonction (une procédure)  $\mathbf{x}$  pour calculer les termes  $x_i = \mathbf{x}(i)$  du schéma itératif. Ceci peut être obtenu automatiquement avec la fonction `powcreate` de la bibliothèque `powseries`. Créer la procédure qui calcule  $\mathbf{x}(i)$ . On prendra  $x_0 = \mathbf{x}(0) = 0.4$ . Afficher, pour vérification, la suite des valeurs de  $x_i$  pour  $i = 0, 1, \dots, 5$ .

**Attention :** par précaution on désassignera toujours  $\mathbf{x}$  avant de créer la procédure.

6. On veut maintenant visualiser le processus de convergence. Poser  $N = 50$  et tracer la représentation graphique des itérés en portant en abscisses les valeurs de  $i$  et en ordonnées les valeurs de  $x_i$  pour  $i = 1, 2, \dots, N$ . On tracera ces points en utilisant comme symboles des petits cercles.
7. Calculer  $x_N$  à l'aide de la procédure puis vérifier que l'écart absolu entre  $x_N$  et la solution est inférieur à  $10^{-6}$ .
8. On a  $x_2 = f_k(x_1)$  et  $x_1 = f_k(x_0)$ , c'est-à-dire

$$x_2 = f_k(f_k(x_0)) \stackrel{\text{déf}}{=} (f_k \circ f_k)(x_0) \stackrel{\text{déf}}{=} f_k^{(2)}(x_0)$$

Calculer  $f_k^{(N)}(x_0)$ .

### 9.2.2 Bistabilité pour $k = 3.3$

- Poser  $k = 3.3$  puis résoudre  $x = f(x)$ .
- Montrer que le processus itératif de point fixe n'est plus convergent pour la solution non nulle de  $x = f_k(x)$ .
- Créer la nouvelle procédure définie en 9.2.1-5 puis tracer le graphique défini en 9.2.1-6. Sur cette dernière figure on peut constater que le comportement des itérations tend vers une bistabilité et qu'aucune des deux valeurs ne correspond à la solution. Ce qui devient stable c'est le comportement des suites

$$x_{i+2} = f_k^{(2)}(x_i)$$

On a une suite convergente pour les  $i$  pairs et une suite convergente pour les  $i$  impairs.

- Tracer sur un même dessin les représentations graphiques de  $x$ ,  $f_k(x)$  et  $f_k^{(2)}(x)$ .
- Résoudre  $x = f_k^{(2)}(x)$ . On constate qu'elle possède quatre solutions dont trois sont non nulles et parmi lesquelles on retrouve celle de  $x = f_k(x)$ . Effectivement, si  $x$  est solution de  $x = f_k(x)$ , alors  $x$  est aussi solution de  $x = f_k^{(2)}(x)$  car  $f_k^{(2)}(x) = f_k(f_k(x)) = f_k(x) = x$ .
- Comme pour 9.2.2-2, montrer que le processus itératif associé à  $x = f_k^{(2)}(x)$  n'est pas convergent pour la solution de  $x = f_k(x)$ .
- Montrer par contre que ce processus itératif est convergent pour les deux nouvelles solutions de  $x = f_k^{(2)}(x)$ . Ceci explique le comportement de bistabilité observé plus haut.
- Pour bien comprendre la différence avec le cas 9.2.1, reprendre la question 9.2.2-4 pour  $k = 2.8$  et comparer les deux dessins.

### 9.2.3 Etude de la première et deuxième bifurcation

On appelle *première bifurcation* l'apparition du premier changement de régime des itérations (un dessin ultérieur expliquera ce terme de bifurcation). On appellera  $k_1$  la valeur de  $k$  pour laquelle elle apparaît.

1. Lever l'assignation de la valeur numérique à  $k$  et calculer l'expression de la solution non nulle  $x_k$  de  $x = f_k(x)$ .
2. Calculer l'expression de la valeur dérivée  $f'(x_k)$  puis calculer l'intervalle des valeurs de  $k$  pour lesquelles  $|f'(x_k)| < 1$ , c'est-à-dire l'intervalle des valeurs de  $k$  pour lesquelles les itérations sont stables.
3. En s'inspirant de ces deux dernières questions, calculer l'intervalle  $[k_1, k_2]$  des valeurs de  $k$  pour lesquelles le processus itératif est bistable. On devra vérifier que cet intervalle est le même pour les deux solutions non nulles de  $x = f_k^{(2)}(x)$  qui ne sont pas solution de  $x = f_k(x)$ .

### 9.2.4 Transition vers le chaos

Quand on continue d'augmenter  $k$  on observe à nouveau une bifurcation pour chaque point de convergence des itérations et ainsi de suite pour des valeurs successives de  $k$  de plus en plus proches. Après une valeur limite  $k_\infty$ , les itérations ne présentent plus de régularité et se comportent de façon chaotique (à l'exception de quelques valeurs de  $k$ ).

1. Poser  $k = 3.8$ . Après avoir créé la procédure définie en 9.2.1-5, tracer le graphique défini en 9.2.1-6. On peut constater que tout semble devenu aléatoire.
2. On veut tracer le diagramme des bifurcations, c'est-à-dire le graphique des points de convergence (quand ils existent) des itérations en fonction de  $k$ . Former la liste  $K$  des valeurs de  $k$  suivantes : 1.00, 1.01, 1.02, ..., 3.98, 3.99, 4.00. Tracer sur un même dessin et pour chacune de ces valeurs de  $k$ , les itérés  $x_i$  pour  $i = 80, 81, \dots, 100$ .

**Indication :** on construira une boucle avec le schéma suivant :

```
for k in K do
```

```
    Créer la procédure x (prendre  $x_0 = 0.5$ ) sans oublier de désassigner x
```

```
    Créer une suite p dont chaque élément sera la représentation graphique sous forme de points les 20 coordonnées  $(k, x_i)$ ,  $i = 80, \dots, 100$ , c'est-à-dire :
```

```
    p := p,plot(...) ;
```

```
end do :
```

Afficher ensuite ces dessins sur un même graphique.



# Chapitre 10

## 10.1 L'ion moléculaire hydrogénoïde

L'ion moléculaire  $\text{H}_2^+$  est constitué de deux protons et d'un électron. Dans l'approximation de Born-Oppenheimer, l'hamiltonien électronique du système s'écrit (en unités atomiques) :

$$H_{\text{el}} = -\frac{1}{2}\nabla^2 - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}$$

$r_1$  et  $r_2$  étant les distances séparant l'électron de chacun des protons. De façon à étudier la stabilité du système  $\text{H}_2^+$ , on ajoute dans  $H_{\text{el}}$  le terme de répulsion coulombienne nucléaire  $\frac{1}{R}$ ,  $R$  étant la distance internucléaire. Alors

$$H_{\text{el}} = -\frac{1}{2}\nabla^2 - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{R}$$

L'origine  $O$  du référentiel galiléen  $(O, x, y, z)$  est choisi au milieu du segment internucléaire et  $r$  désigne la position de l'électron par rapport à  $O$ .

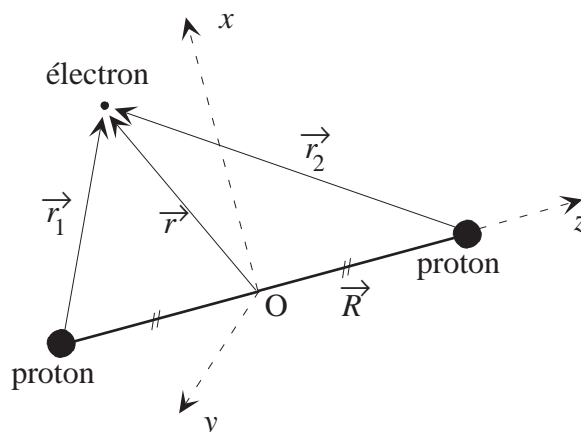


FIG. 10.1 – Coordonnées utilisées

On se propose de déterminer l'énergie de la fonction d'onde de l'état électronique fondamental du système, solution de l'équation  $H_{\text{el}} |\Psi(R, \vec{r})\rangle = E(R) |\Psi(R, \vec{r})\rangle$ , par combinaison linéaire des états atomiques sphériques  $1s$  de chacun des sous-systèmes proton-électron, c'est-à-dire :

$$|\Psi(R, \vec{r})\rangle = C_1(R) |\varphi_1(\vec{r})\rangle + C_2(R) |\varphi_2(\vec{r})\rangle$$

avec

$$\varphi_1(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-r_1} \quad \text{et} \quad \varphi_2(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-r_2}$$

L'énergie propre  $E(R)$  est solution de l'équation  $\det(\mathbf{H} - E(R)\mathbf{S}) = 0$  où  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{S}$  sont des matrices définies par :

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \langle \varphi_1 | H_{\text{el}} | \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1 | H_{\text{el}} | \varphi_2 \rangle \\ \langle \varphi_2 | H_{\text{el}} | \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2 | H_{\text{el}} | \varphi_2 \rangle \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \langle \varphi_1 | \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle \\ \langle \varphi_2 | \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_2 | \varphi_2 \rangle \end{pmatrix}$$

Les coefficients  $C_1(R)$  et  $C_2(R)$ , générateurs de l'état propre  $|\Psi(R, \vec{r})\rangle$ , sont alors obtenus en résolvant le système linéaire  $[\mathbf{H} - E(R)\mathbf{S}]\mathbf{C} = 0$  où  $\mathbf{C}^T = [C_1(R), C_2(R)]$ .

### 10.1.1 Calculs en coordonnées cartésiennes

Exprimer  $r_1$  et  $r_2$  en fonction de  $x$ ,  $y$  et  $z$  et former les fonctions  $\varphi_1(\vec{r})$  et  $\varphi_2(\vec{r})$ .

### 10.1.2 Calculs en coordonnées elliptiques

Il est d'ores et déjà évident que le calcul des matrices  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{S}$  sera compliqué en coordonnées cartésiennes puisque les intégrales impliquées ne seront pas séparables en  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Aussi, les calculs se feront en coordonnées elliptiques :

$$\begin{cases} x = \frac{R}{2} ((\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2))^{\frac{1}{2}} \cos(\phi) \\ y = \frac{R}{2} ((\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2))^{\frac{1}{2}} \sin(\phi) \\ z = \frac{R}{2} \lambda \mu \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} R \geq 0 \\ 1 \leq \lambda \leq \infty \\ -1 \leq \mu \leq 1 \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{cases}$$

En précisant ces contraintes sur les variables (celles sur  $\phi$  sont inutiles) calculer les expressions de  $x$ ,  $y$  et  $z$  en fonction de  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $\phi$ . De même, déterminer et simplifier les expressions de  $r_1$  et  $r_2$ , fonctions maintenant de  $R$ ,  $\lambda$  et  $\mu$ . Construire ensuite les expressions de  $\varphi_1(\vec{r})$  et  $\varphi_2(\vec{r})$ .

### 10.1.3 Calcul du Jacobien

Pour calculer les intégrales dans le nouveau système de coordonnées il faut connaître le Jacobien  $J$  de la transformation  $(x, y, z) \rightarrow (\lambda, \mu, \phi)$  :

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial z}{\partial \mu} \\ \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial z}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

Calculer et simplifier l'expression de  $J$ .

### 10.1.4 Calcul de la matrice de recouvrement

Calculer séparément les éléments de la matrice  $\mathbf{S}$  :

$$\mathbf{S}_{ij} = \langle \varphi_i(\vec{r}) | \varphi_j(\vec{r}) \rangle = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \int_{+1}^{\infty} \varphi_i(\lambda, \mu, \phi) \varphi_j(\lambda, \mu, \phi) J d\lambda d\mu d\phi$$

en notant que  $\mathbf{S}_{ij} = \mathbf{S}_{ji}$ . Construire enfin la matrice  $\mathbf{S}$ .

### 10.1.5 Calcul de la matrice du hamiltonien électronique

Construire la matrice  $\mathbf{H}$  dont les éléments sont donnés par :

$$\mathbf{H}_{ij} = \langle \varphi_i(\vec{r}) | H_{\text{el}} | \varphi_j(\vec{r}) \rangle = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \int_{+1}^{\infty} \varphi_i(\lambda, \mu, \phi) H_{\text{el}} \varphi_j(\lambda, \mu, \phi) J d\lambda d\mu d\phi$$

On notera que  $\langle \varphi_i(\vec{r}) | -\frac{1}{2}\nabla^2 - \frac{1}{r_j} + \frac{1}{R} | \varphi_j(\vec{r}) \rangle = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{R}) \mathbf{S}_{ij}$  et que  $\mathbf{H}_{ij} = \mathbf{H}_{ji}$ . Il reste donc à calculer

$$\langle \varphi_i(\vec{r}) | -\frac{1}{r_i} | \varphi_j(\vec{r}) \rangle = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \int_{+1}^{\infty} \varphi_i(\lambda, \mu, \phi) \left(-\frac{1}{r_i}\right) \varphi_j(\lambda, \mu, \phi) J d\lambda d\mu d\phi$$

### 10.1.6 Calcul des énergies propres du système

Construire la matrice  $\mathbf{H} - \epsilon \mathbf{S}$  où  $\epsilon$  est la valeur propre de l'énergie du système que l'on va déterminer. Calculer le déterminant de la matrice. On vérifiera que l'on obtient un polynôme de degré 2 en  $\epsilon$ .

La solution de l'équation  $\det(\mathbf{H} - \epsilon \mathbf{S}) = 0$  conduira donc à deux énergies propres et donc à deux états propres du système. Ceci est dû à la symétrie additionnelle du système  $H_2^+$  par rapport au plan perpendiculaire à l'axe internucléaire passant par O. Un état est symétrique par réflexion par rapport à ce plan (état *gerade*) et l'autre antisymétrique (état *ungerade*).

1. Construire la fonction  $E : R \mapsto \det(\mathbf{H} - \epsilon \mathbf{S})$ .
2. Construire la fonction  $E_1 : R \mapsto [\det(\mathbf{H} - \epsilon \mathbf{S}) = 0]_1$ ,  $[\dots]_1$  désignant la solution la plus grande de l'équation. Construire de même  $E_2 : R \mapsto [\det(\mathbf{H} - \epsilon \mathbf{S}) = 0]_2$  pour la solution la plus petite.
3. Tracer sur un même dessin les variations de ces deux solutions pour  $R \in [0.5, 10]$ .

Une énergie correspond à une orbitale dite *liante* ( $L$ ) et l'autre dite *antiliante* ( $AL$ ). Identifier chacune d'entre elles. À quoi correspond la valeur de ces deux fonctions quand  $R$  tend vers  $+\infty$ .

### 10.1.7 Visualisation des orbitales

On désire finalement visualiser ces deux orbitales dans le plan  $(O, x, z)$  pour  $R = 2.5$  unités atomiques.

1. Calculer les énergies propres  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$  pour  $R = 2.5$  ua.
2. Construire les matrices  $\mathbf{H} - \epsilon_1 \mathbf{S}$  et  $\mathbf{H} - \epsilon_2 \mathbf{S}$ .

- Soient les vecteurs  $\mathbf{C}_L = \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]^T$  et  $\mathbf{C}_{AL} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right]^T$ . Construire ces vecteurs et vérifier que  $[\mathbf{H} - \epsilon_1 \mathbf{S}] \mathbf{C}^L = 0$  et que  $[\mathbf{H} - \epsilon_2 \mathbf{S}] \mathbf{C}^{AL} = 0$ .  
Le vecteur  $\mathbf{C}_L$  est générateur de l'orbitale liante dans la base  $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle\}$  et  $\mathbf{C}_{AL}$  celui de l'orbitale antiliante.
- Créer les fonctions  $\Psi_{01} : (x, z, R) \mapsto \varphi_1(x, 0, z)$  et  $\Psi_{02} : (x, z, R) \mapsto \varphi_2(x, 0, z)$ . Visualiser sur deux représentations graphiques 3D distinctes, les orbitales liantes et antiliantes pour  $x \in [-4, +4]$ ,  $z \in [-4, +4]$  et  $R = 2.5$ .

## 10.2 Source d'ondes sonores en mouvement

### 10.2.1 Effet Doppler

On considère une source  $M$  émettant un signal sonore de période  $T$  et se déplaçant sur la droite  $y = l$  à la vitesse  $v$  (de la gauche vers la droite). Le son se propage dans l'air avec une célérité  $c$ .

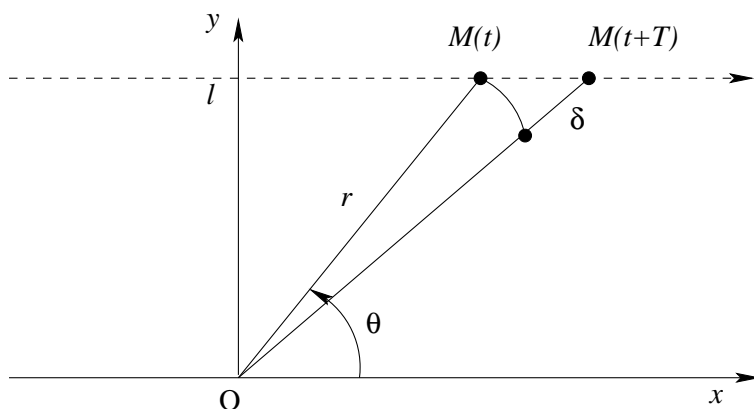


FIG. 10.2 – Mouvement de la source sonore dans le plan

#### A - Détermination de la période $T'$ perçue par un observateur immobile au point O

- À quel temps  $t'$  un son émis par  $M$  au temps  $t$  est-il perçu par un observateur en O? Exprimer l'équation donnant  $t'$  et l'assigner à eq1 (i.e. écrire eq1 := tp = ...).
- A quel temps  $t' + T'$  un son émis par  $M$  au temps  $t + T$  (c'est à dire une période plus tard) est-il perçu par un observateur en O? Exprimer l'équation donnant  $t' + T'$  en fonction de  $t, T, r, \delta$  et  $c$  et l'assigner à eq2.
- En effectuant la différence des 2 équations précédentes, former l'équation donnant la période  $T'$  perçue par l'observateur en fonction de  $T, \delta$  et  $c$ . Assigner cette équation à eq3.
- En supposant négligeable la variation de  $\theta$  entre  $t$  et  $t + T$ , donner l'expression de  $\delta$  en fonction de  $v, T$  et  $\theta$ . Substituer cette expression dans eq3 et assigner le résultat à eq4. On mettra  $T$  en facteur dans l'expression.

**B - Tracé de la fréquence perçue en fonction du temps**

1. En exprimant  $\cos(\theta)$  en fonction de  $v$ ,  $t$  et  $l$ , exprimer, toujours sous la forme d'une équation,  $T'$  en fonction de  $t$  à partir de **eq4**. Assigner le résultat à **eq5**.
2. À partir de **eq5** construire une fonction donnant la fréquence  $F'$  (inverse de la période) perçue en O en fonction de  $t, T, l, v, c$ .
3. Tracer la valeur de cette fréquence (en Hz) pour  $t \in [-1s, +1s]$  et pour  $T = 6 \times 10^{-3}$  s (moteur à 10 000 tr/mn),  $l = 10$  m,  $v = 55.5$  m/s (200 km/h),  $c = 340$  m/s.
4. Calculer l'amplitude totale de la variation de la fréquence perçue en O entre  $t = -\infty$  et  $t = +\infty$ .

**10.2.2 Onde de choc : bang supersonique**

Initialiser Maple.

**A - Étude de la propagation de l'onde sphérique émise par une source au repos**

1. Pour cette question on considère la source à l'origine d'un repère  $O'uv$  (notations indépendantes du graphique 10.2). L'équation de la variation de pression en tout point est de la forme :

$$p(r, t) = \frac{p_{\max}}{r} \cos(\omega t - kr) \quad (10.1)$$

où  $r = \sqrt{u^2 + v^2}$  est la distance au point O',  $\omega$  la pulsation et  $k = \omega/c$  le vecteur d'onde. Créer la fonction  $p(u, v, \omega, k, t)$  et tracer à l'aide d'une figure animée l'évolution temporelle de l'onde. On prendra comme paramètres  $\omega = 880\pi$  rad/s,  $c = 320$  m/s,  $t \in [-2, +2]$  (secondes) et  $p_{\max} = 1$ . On fixera les limites spatiales du graphique à  $\pm 1.5$  m. On choisira de plus comme options : `frames=40, numpoints=512, orientation=[45, 45]`.

2. Afin de mieux comprendre la propagation du signal émis par la source, on considère l'évolution spatio-temporelle d'un ensemble de points isobares de pression maximale (un maximum local de l'onde, mais dont l'amplitude décroît comme l'inverse de la distance d'émission). On voit, sur l'animation précédente, que ces points forment un cercle. Assigner à **eq1** l'équation vérifiée par ces points, c'est-à-dire  $\cos(\omega t - kr) = 1$ . Résoudre cette équation et trouver l'expression du rayon  $r$  en fonction de  $t$  et de  $c$  (**eq2**).
3. Toutes les périodes  $T$ , un nouveau maximum de l'onde est généré par la source et commence à se propager. En supposant que la source commence à émettre à  $t_0 = 0$ , on numérote les cercles successifs  $\mathcal{C}_i$  pour  $i$  allant de 0 à  $n$ . Chaque cercle  $\mathcal{C}_i$  possède comme caractéristique la position  $x_i(t), y_i(t)$  de son centre (identiques  $\forall i$  si la source est immobile) et son rayon  $r_i(t)$ . On se propose de visualiser l'état de l'onde à chaque période, c'est à dire aux temps  $t = 0, T, 2T, 3T, \dots$  soit  $t_i = iT$ . Définir cette fonction qui fournit la valeur du temps après  $i$  périodes. Définir une fonction  $r(i, \tau)$  qui donne la valeur du rayon  $r_i(\tau)$  du cercle  $\mathcal{C}_i$  au temps  $\tau$ . On conservera les mêmes valeurs numériques pour  $c$  et  $\omega$ .
4. Le programme Maple suivant permet de visualiser, sous forme d'animation, l'évolution de l'onde. Il utilise les fonctions  $t(i)$  et  $r(i, \tau)$  qui viennent d'être définies. Le recopier dans la feuille Maple.

```

> propa:=proc(N,v,x0,y0)
  local i,j,li,lo,S;
  li:=NULL;
  for j from 2 to N do
    lo[j]:=NULL;
    for i from j by -1 to 1 do
      S[j][i]:=plottools[circle]([x0+v*t(i),y0],r(i,t(j)));
      lo[j]:=lo[j],S[j][i]:
    od:
    li:=li,plots[display](lo[j]):
  od:
end:

```

Les paramètres utilisés sont :  $N$  le nombre de périodes sur lequel on étudie l'évolution,  $v$  la vitesse de déplacement de la source,  $x_0$  et  $y_0$  la position initiale de la source. On crée une suite `anim` de graphiques correspondant à l'état de l'onde aux temps  $t(0)$  à  $t(N)$  en entrant la commande `anim:=propa(N,v,x0,y0)` : et en donnant, pour une source immobile avec  $v = 0$ , les valeurs numériques  $N = 25$ ,  $x_0 = -10$ ,  $y_0 = 10$ . Utiliser ensuite la commande `display` (avec comme option `insequence=true,scaling=constrained`) pour visualiser `anim`.

## B - Etude de la propagation de l'onde sphérique émise par une source en mouvement

La source se déplace maintenant à une vitesse  $v$  le long d'un axe parallèle aux abscisses. La position de son centre devient donc  $x = x_0 + vt$ ,  $y = y_0$ .

1. **Déplacement subsonique**  $v < c$  : à l'aide de la procédure `propa`, tracer l'évolution de l'onde pour  $v = 150$  m/s. Qu'observez-vous ? A quoi correspond la distance entre deux cercles successifs lorsque l'on se place en un point particulier ?
2. **Déplacement à la vitesse du son**  $v = c$  : que remarquez-vous maintenant sur la représentation graphique ? Que devient la période sur l'axe de déplacement de la source. Justifier votre réponse avec les résultats de la section 10.2.1. Expliquer pourquoi le son perçu sur l'axe  $y = y_0$  lors du passage du front est très intense.
3. **Déplacement supersonique**  $v > c$  : étudier le cas  $v = 450$  m/s. Pourquoi un observateur situé en O perçoit-il quand même le bang sonore ? Un son (voir le graphique de la section 10.2.1) émis au temps  $t$  en  $M(t)$  est perçu en O au temps  $t'$ . Créer la fonction  $t'(t)$  (dépendant de  $t$ ,  $l$  et  $v$ ). Tracer  $t'(t)$ . Calculer la dérivée de  $\frac{\partial}{\partial t}t'(t)$  et trouver les valeurs de  $t_0$  pour lesquelles elle s'annule. Pourquoi le son perçu en O est-il très intense lorsque la dérivée de  $t'(t)$  s'annule ? Que représente  $t_0$  ?

## 10.3 Oscillations de Rabi

On se propose d'étudier le comportement d'un système atomique en présence d'un champ électro-magnétique monochromatique d'intensité modérée et de pulsation proche de la résonance atomique entre 2 états particuliers  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  de l'atome. Le système étant initialement (avant l'interaction avec le champ) dans l'état  $|a\rangle$ , seul l'état  $|b\rangle$  est efficacement couplé à  $|a\rangle$  par le

champ quasi résonant. La probabilité de peupler les autres états étant donc très faible, on limite le système aux deux seuls états  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  comme indiqué sur la figure :

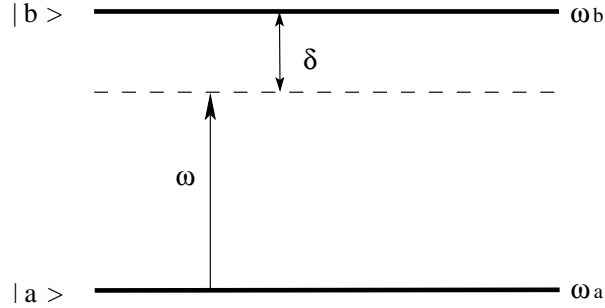


FIG. 10.3 – système quantique à 2 niveaux

La fonction d'onde du système vérifie l'équation de Schrödinger dépendante du temps :

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = (H_o + D.E_o e^{i\omega t})|\psi(t)\rangle \quad (10.2)$$

où  $D$  est le moment dipolaire électrique du système,  $E_o$  l'amplitude du champ électromagnétique et  $\omega$  sa pulsation.

### 10.3.1 Formulation du problème

On recherche les solutions de cette équation sous la forme d'une combinaison linéaire des deux états quantiques :

$$|\psi(t)\rangle = a(t)|a\rangle + b(t)|b\rangle \quad (10.3)$$

où  $a(t)$  représente l'amplitude de probabilité de trouver le système dans l'état  $|a\rangle$  d'énergie  $\omega_a$  ( $\hbar = 1$  en unité atomiques) au temps  $t$  (et réciproquement pour  $b(t)$ ).

En remplaçant 10.3 dans 10.2, on obtient le système d'équations couplées :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}a(t) + i\omega_a a(t) + ib(t)\mu E_o e^{i\omega t} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}b(t) + i\omega_b b(t) + ia(t)\mu E_o e^{-i\omega t} &= 0 \end{aligned} \quad (10.4)$$

où  $\mu = \langle a|D|b\rangle$  est le couplage entre l'état  $|a\rangle$  et l'état  $|b\rangle$ .

Ecrire le système d'équations différentielles 10.4 en assignant respectivement chaque équation aux noms eq1 et eq2.

### 10.3.2 Résolution du système d'équations différentielles

1. Afin de faciliter la résolution de ce système, effectuer les changements de variables suivants :

$$a(t) = A(t)e^{-i\omega_a t} \quad (10.5)$$

$$b(t) = B(t)e^{-i\omega_b t} \quad (10.6)$$

et réassigner chaque équation à eq1 et eq2 respectivement.

2. Simplifier les expressions pour obtenir une forme plus compacte faisant intervenir un terme de la forme  $\exp(i\omega_a t - i\omega_b t + i\omega t)$  ou son complexe conjugué.
3. La quantité  $\omega_a - \omega_b + \omega$  correspond en fait à l'écart  $\delta$  d'énergie par rapport à la résonance (voir figure 10.3). Effectuer un changement de variable pour transformer l'exponentielle en  $\exp(i\delta t)$ . Réassigner à nouveau les nouvelles équations à `eq1` et `eq2`.
4. Résoudre le système d'équations différentielles sachant que le système atomique se trouve dans l'état  $|a\rangle$  à  $t = 0$  et assigner les solutions à `sol1`.
5. Manipuler les expressions des solutions pour les écrire sous une forme plus lisible.

### 10.3.3 Applications numériques

#### A - Populations

1. En faisant l'hypothèse que les variables  $t$ ,  $\delta$ ,  $E_o$  et  $\mu$  sont réelles, définir `Population_a` et `Population_b`, deux fonctions des paramètres  $t$ ,  $\delta$ ,  $E_o$  et  $\mu$  qui donnent la valeur de la population dans chaque état à partir des amplitudes de probabilité  $A(t)$  et  $B(t)$ .
2. Tracer l'évolution, au cours du temps, des populations dans chaque état pour les paramètres suivants (il s'agit du cas de l'hydrogène et des états  $|a\rangle = |1s\rangle$  et  $|b\rangle = |2p\rangle$ ) :
  - $\delta = 0.02$  a.u.
  - $E_o = 0.01$  a.u.
  - $\mu = 0.75$  a.u.
 L'intervalle de temps sera choisi de manière à observer 3 ou 4 oscillations.
3. Vérifier qu'il y a conservation de la somme des populations au cours du temps.

#### B - Résonance

On se propose d'étudier ici le passage à la résonance du système lorsque l'énergie du photon est très proche de la différence d'énergie entre les 2 états ( $\delta \approx 0$ ).

1. Déterminer pour quelle valeur  $t_0$  de  $t$  la population de l'état  $|b\rangle$  est maximale.
2. Déterminer alors la valeur de la population maximale `B_max`. Transformer cette expression en une fonction des paramètres  $\delta$ ,  $E_o$  et  $\mu$ .
3. Tracer la population maximale en fonction de l'écart à la résonance  $\delta$  pour  $E_o = 0.01$  a.u. et  $\mu = 0.75$  a.u.
4. Quelle est la condition pour avoir un transfert maximal de la population de  $|a\rangle$  vers  $|b\rangle$  ?
5. Dans les conditions de champ citées plus haut, déterminer les valeurs de  $\delta$  pour avoir un transfert de la population égal à 50 %.